Math Sup PCSI - Le mardi 12 septembre 2006

Devoir Libre N°1

Pour le mardi 19 septembre 2006

Exercice 1 On rappelle la formule des sommes géométriques :

$$\forall\, z \neq 1, \quad 1 + z + z^2 + \cdots + z^n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}.$$

1. Calculer $S = 1 + e^{i\frac{2\pi}{5}} + e^{i\frac{4\pi}{5}} + e^{i\frac{6\pi}{5}} + e^{i\frac{8\pi}{5}}$.
   En déduire que $1 + \cos(\frac{2\pi}{5}) + \cos(\frac{4\pi}{5}) + \cos(\frac{6\pi}{5}) + \cos(\frac{8\pi}{5}) = 0$.
2. Vérifier que $\cos(\frac{2\pi}{5}) + \cos(\frac{8\pi}{5}) = 4\cos^2(\frac{\pi}{5}) - 2$, et que $\cos(\frac{4\pi}{5}) + \cos(\frac{6\pi}{5}) = -2\cos(\frac{\pi}{5})$.
3. Etablir que $\cos(\frac{\pi}{5})$ est solution de l'équation $4x^2 - 2x - 1 = 0$.
   En déduire que $\cos(\frac{\pi}{5}) = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$.
4. Prouver que $\cos(\frac{2\pi}{5}) = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$.
5. Calculer $\sin(\frac{\pi}{5})$, $\sin(\frac{2\pi}{5})$, $\cos(\frac{3\pi}{5})$ et $\cos(\frac{\pi}{10})$.

Exercice 2

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on désigne par f_n la fonction définie par

$$\forall\, x \in]-1, +\infty[, \quad f_n(x) = x^n \ln(1 + x).$$

1. (a) Déterminer le tableau de variation de la fonction h_n définie sur $]-1, +\infty[$ par

   $$h_n(x) = n\ln(1 + x) + \frac{x}{1 + x}.$$

   Préciser le signe de $h_n(x)$ sur $]-1, +\infty[$.

   (b) En déduire le tableau de variation de f_n.
   (*On distinguera deux cas, suivant que n est pair ou impair.*)

   (c) Pour $x \in]0, +\infty[$, comparer $f_n(x)$ et $f_{n+1}(x)$.

   (d) Représenter sur une même figure les graphes des fonctions f_1, f_2 et f_3.
2. (a) Justifier l'existence d'un unique réel α_n dans $\mathbb{R}^{+*}$ tel que $f_n(\alpha_n) = 1$.
   Montrer que $\alpha_n > 1$.
   Placer α_1, α_2 et α_3 sur le graphe de la question 1.(d).

   (b) En utilisant la question 1.c, montrer que la suite (α_n) est décroissante.