Math Sup PCSI - Le mardi 13 février 2007

Devoir Libre N°10

Pour le mardi 6 mars 2007

Partie I : étude d'un exemple

Soit f l'application de $\mathbb{R}^3$ dans lui-même définie par :

$$\forall\, \vec{u} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad f(\vec{u}) = (y + z, -x + 2y + z, -x + y + 2z).$$

1. (a) Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.
   (b) Prouver que f est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$.
   (c) Préciser, en fonction de x, y et z, l'expression de $f \circ f\,(\vec{u})$.
   En déduire que $[f - id_{\mathbb{R}^3}] \circ [f - 2\, id_{\mathbb{R}^3}] = \tilde{0}$.
2. On note $\mathcal{P} = \mathrm{Ker}(f - id_{\mathbb{R}^3})$ et $\mathcal{D} = \mathrm{Ker}(f - 2\, id_{\mathbb{R}^3})$.
   (a) Prouver que $\mathcal{P}$ =vect$(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ et $\mathcal{D}$=vect$(\vec{e}_3)$, avec $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ trois vecteurs à préciser.
   (b) Justifier que $\mathcal{P}$ est un plan vectoriel, et $\mathcal{D}$ une droite vectorielle non incluse dans $\mathcal{P}$.

   On en déduit donc que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{D}$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.
   Notons alors p (resp. q) le projecteur sur $\mathcal{P}$ (resp. $\mathcal{D}$) parallèlement à $\mathcal{D}$ (resp. $\mathcal{P}$).

   (c) Vérifier que tout $\vec{u} = (x, y, z)$ de $\mathbb{R}^3$ s'écrit de manière unique sous la forme

   $$\vec{u} = \lambda_1\, \vec{e}_1 + \lambda_2\, \vec{e}_2 + \lambda_3\, \vec{e}_3$$

   où $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ sont trois réels à déterminer en fonction de x, y, z.
   (d) En déduire l'expression de $p(\vec{u})$ et $q(\vec{u})$ en fonction de x, y, z.
   (e) Vérifier que $f = p + 2\,q$.
   Sur une figure, représenter $\mathcal{P}$, $\mathcal{D}$, un vecteur quelconque $\vec{u}$, et son image $f(\vec{u})$.

Partie II : cas général

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, a et b deux réels distincts, et $f \in L(E)$ tel que :

$$[f - a\, id_E] \circ [f - b\, id_E] = \tilde{0}.$$

1. On note $F_a = \mathrm{Ker}(f - a\, id_E)$ et $F_b = \mathrm{Ker}(f - b\, id_E)$.
   (a) Vérifier que $F_a \cap F_b = \{0_E\}$.
   (b) Montrer que $\mathrm{Im}(f - b\, id_E) \subset F_a$.
   (c) Vérifier que $[f - b\, id_E] \circ [f - a\, id_E] = [f - a\, id_E] \circ [f - b\, id_E]$.
   En déduire que $\mathrm{Im}(f - a\, id_E) \subset F_b$.
   (d) Pour $x \in E$, simplifier l'expression $\frac{1}{a-b}[f - b\, id_E](x) + \frac{1}{b-a}[f - a\, id_E](x)$.
   En déduire que $E = F_a \oplus F_b$.

On note p (resp. q) le projecteur sur F_a (resp. F_b) parallèlement à F_b (resp. F_a).

2. Prouver que $f = a\,p + b\,q$.

On rappelle que $f^0 = id_E$, et pour tout n entier naturel non nul, $f^n = \overbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}^{n \text{ fois}}$.

3. Etablir que : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $f^n = a^n p + b^n q$.
   Pour $x \in E$, préciser l'expression de $f^n(x)$ en fonction de a, b, x et $f(x)$.