

Devoir Libre N°2
Pour le mardi 3 octobre 2006

Problème

Les parties 1 et 2 sont indépendantes, mais utilisées dans la partie 3.

1. Soit f la fonction définie sur $[0, \pi]$ par $f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{5-4\cos x}}$.
 - (a) Dériver f .
On exprimera $f'(x)$ en fonction de $\cos(x)$ uniquement.
 - (b) On pose $P(y) = 2y^2 - 5y + 2$.
Déterminer le signe de $P(y)$ en fonction des valeurs réelles de y .
 - (c) En déduire le tableau de variation de f sur $[0, \pi]$.
 - (d) Tracer l'allure du graphe de f , en précisant les équations des tangentes en $x = 0$ et $x = \pi$.

2. Soit g la fonction définie sur $[0, \pi]$ par $g(x) = \arccos\left(\frac{4-5\cos x}{5-4\cos x}\right)$.
 - (a) Vérifier que g est bien définie et continue sur $[0, \pi]$.
 - (b) Pour $x \in [0, \pi]$, simplifier les expressions de $\cos(g(x))$ et $\sin(g(x))$.
 - (c) Justifier que g est dérivable sur $]0, \pi[$, puis calculer $g'(x)$.
(On pourra dériver la relation donnant $\cos(g(x))$ obtenue à la question précédente.)
 - (d) Montrer que g est une bijection de $[0, \pi]$ sur $[0, \pi]$.
 - (e) Vérifier que $\forall x \in [0, \pi], g(g(x)) = x$.
Qu'en déduit-on sur g^{-1} ?
 - (f) Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0} g'(x)$ et $\lim_{x \rightarrow \pi} g'(x)$.
 - (g) Tracer l'allure du graphe de g .
On utilisera en particulier les résultats de (e) et (f).

3. Soit y un réel appartenant à l'intervalle $[0, \frac{1}{2}]$.
 - (a) Montrer qu'il existe un unique réel x_1 dans $[0, \frac{\pi}{3}]$ tel que $f(x_1) = y$, et un unique réel x_2 dans $[\frac{\pi}{3}, \pi]$ tel que $f(x_2) = y$.
 - (b) Prouver que $x_2 = g(x_1)$.
 - (c) Reproduire les graphes de f et g sur une même figure, et illustrer graphiquement les résultats des questions (a) et (b).