

Devoir Libre N°3

Pour le mardi 17 octobre 2006

Exercice A Rédiger la solution de l'exercice II du DS1.

1. Soit la fonction $g :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x) = \ln(x+1) - \ln(x) + \frac{x}{x+1}$.
 - (a) Déterminer le tableau de variation de g .
 - (b) En déduire que $\forall x > 0, g(x) > 1$.
2. Soit la fonction $f :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x [\ln(x+1) - \ln(x)]$.
 - (a) Calculer $f'(x)$ pour $x > 0$.
Vérifier que $f'(x) = g(x) + C$, où C est une constante à déterminer.
 - (b) Vérifier que la fonction f est prolongeable par continuité en 0.
La fonction f ainsi prolongée est-elle dérivable en 0?
 - (c) Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$.
En déduire que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$.
 - (d) Construire le tableau de variation de f , et tracer l'allure de son graphe.
3. On pose $u_n = (1 + \frac{1}{n})^n$. Déterminer le sens de variation ainsi que la limite de la suite (u_n) .

Exercice B Le plan est muni d'un repère orthonormé direct.

Soient $A(3, -2)$, $B(-1, -3)$ et $C(1, 2)$.

1. Déterminer les coordonnées de G , centre de gravité (intersection des médianes) du triangle ABC .
2. Déterminer les coordonnées de H , orthocentre (intersection des hauteurs) du triangle ABC .
3. Déterminer les coordonnées de Ω , centre du cercle circonscrit (intersection des médiatrices) du triangle ABC .
4. Vérifier que G , H et Ω sont alignés.

Exercice C

Soit ABC un triangle isocèle en A . On note M le milieu de $[BC]$, H le projeté orthogonal de M sur (AC) et I le milieu de $[MH]$.

Montrer que $(AI) \perp (BH)$.