Math Sup PCSI - Le jeudi 26 octobre 2006

Devoir Libre N°4

Pour le mardi 7 novembre 2006

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Exercice A Soit Γ la courbe définie par la représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x(t) = t - \operatorname{th} t \\ y(t) = \frac{1}{\operatorname{ch} t} \end{cases} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

On note $M(t)$ le point de Γ de paramètre t.

1. Montrer que l'on peut restreindre l'étude de Γ aux valeurs de $t \in \mathbb{R}^+$ à l'aide d'une symétrie à préciser.
2. Dresser le tableau de variation commun de x et de y sur $\mathbb{R}^+$.
3. Préciser la tangente à Γ au point $M(0)$.
4. Etudier les branches infinies de Γ (toujours pour $t \in \mathbb{R}^+$).
5. (a) Pour $t \neq 0$, déterminer une équation cartésienne de la tangente $D(t)$ à Γ en $M(t)$. On écrira cette dernière sous la forme $D(t) \;:\; y = \lambda(t)\, x + \mu(t)$.
   (b) Vérifier que l'équation $\operatorname{sh} t = 1$ admet une unique solution α dont on donnera une expression à l'aide d'un logarithme népérien.
   Calculer $\operatorname{ch} \alpha$ et $\operatorname{th} \alpha$.
   (c) En déduire qu'il existe un unique point A de Γ en lequel la tangente a pour coefficient directeur -1. Préciser les coordonnées de A.
6. Tracer l'allure de Γ.
7. La tangente à Γ en $M(t)$ coupe l'axe des abscisses en un point $N(t)$.
   Vérifier que la distance $M(t)N(t)$ est une constante que l'on calculera.

Exercice B Soit $\mathcal{C}$ la courbe d'équation polaire $r = \sqrt{2\cos(2\theta)}$.

1. (a) On note $(\vec{u}_\theta, \vec{v}_\theta)$ la base polaire.
   Vérifier que $\vec{t_\theta} = -\sin(2\theta)\vec{u}_\theta + \cos(2\theta)\vec{v}_\theta$ est un vecteur directeur de la tangente à $\mathcal{C}$ en $M(\theta)$.
   (b) Exprimer le vecteur $\vec{t_\theta}$ en fonction de $\vec{i}$ et $\vec{j}$.
   Pour quelles valeurs de θ la tangente à $\mathcal{C}$ est-elle horizontale ?
   (c) Etudier et tracer $\mathcal{C}$.
   (*Ramener l'intervalle d'étude à* $[0, \frac{\pi}{2}]$ *en comparant, en autres,* $M(\theta+\pi)$ *et* $M(\theta)$.)
2. On note $\mathcal{C}'$ la courbe d'équation polaire $r = -\sqrt{2\cos(2\theta)}$.
   Montrer que $\mathcal{C}' = \mathcal{C}$.
3. Soient A et B deux points de coordonnées cartésiennes respectives $(1, 0)$ et $(-1, 0)$.
   Montrer que $\mathcal{C}$ est exactement l'ensemble des points M tels que

$$AM \times BM = 1.$$