Devoir Libre N°5

Pour le mardi 21 novembre 2006

Exercice 1 Rédiger la réponse de la partie II - problème A - DS2 :

On considère la fonction F définie par : $\forall x > 0, \quad F(x) = \int_1^x \frac{\ln t}{1+t^2}\, dt$.

1. Justifier la dérivabilité de F sur $\mathbb{R}_+^*$, et calculer $F'(x)$.
   Préciser le sens de variation de F sur $\mathbb{R}_+^*$, ainsi que le signe de $F(x)$.
2. (a) Montrer que : $\forall x > 0$, $F(x) = \arctan x \, \ln x - \displaystyle\int_1^x \frac{\arctan t}{t}\, dt$.
   (b) Prouver que $\displaystyle\lim_{t\to 0} \frac{\arctan t}{t} = 1$.
   Ceci prouve l'existence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\arctan t}{t}\, dt$, que l'on notera ℓ.
   (c) Prouver que $\displaystyle\lim_{x\to 0} F(x) = \ell$.
   (d) Préciser $\displaystyle\lim_{x\to 0} F'(x)$. Qu'en déduit-on sur le graphe de F ?
3. Montrer que : $\forall x > 0$, $F(x) = F(\frac{1}{x})$. En déduire $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} F(x)$.
4. En admettant que $\ell \approx 0.92$, tracer l'allure du graphe de F.

Exercice 2 Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $\mathcal{R} = (O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Soit $\mathcal{C}$ la conique d'équation cartésienne $x^2 + xy + y^2 - 3x = 0$.
   Déterminer la nature de $\mathcal{C}$, ses éléments, et tracez-la.
   (*Pour affiner le tracé, on précisera l'intersection de $\mathcal{C}$ avec les axes des abscisses et ordonnées de $\mathcal{R}$.*)
2. Soit Γ la courbe de paramétrage : $\begin{cases} x(t) = \frac{3}{t^2+t+1} \\ y(t) = \frac{3t}{t^2+t+1} \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$.
   (a) Déterminer le tableau de variation commun de $t \mapsto x(t)$ et $t \mapsto y(t)$.
   (b) Préciser le coefficient directeur $k(t)$ de la droite $(OM(t))$, et calculer $\displaystyle\lim_{t\to\pm\infty} k(t)$.
   Qu'en déduisez-vous sur le comportement de Γ au voisinage de $\pm\infty$?
   (c) Tracer l'allure de la courbe Γ.
   (d) Montrer que $\Gamma \subset \mathcal{C}$.
3. On note Γ' la courbe obtenue en ajoutant le point O à Γ.
   Montrer que $\Gamma' = \mathcal{C}$.