Devoir Libre N°6

Pour le mardi 5 décembre 2006

Exercice 1 Soit p un entier naturel supérieur ou égal à 2 fixé.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \frac{1}{\binom{n+p}{n}}$ et $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$.

1. (a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{(n+p)\,u_n - (n+p+1)\,u_{n+1}}{p-1}$.

   (b) En déduire que $S_n = \frac{1}{p-1}\left[1 - (n+p+1)\,u_{n+1}\right]$.

2. On pose $v_n = (n+p)\,u_n$.

   (a) Montrer que la suite (v_n) est décroissante.

   (b) En déduire que (v_n) converge et que sa limite, notée λ, est positive ou nulle.

3. Déduire des questions précédentes la limite de la suite (S_n).

4. On suppose, dans cette question seulement, que $\lambda > 0$.

   (a) Montrer que $\lim_{n \to +\infty} n\,u_n = \lambda$.

   (b) En déduire que $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}^* : \forall\, n \geqslant n_0,\ u_n \geqslant \frac{\lambda}{2n}$.

   (c) Etablir que $\forall\, x > -1, \quad x \geqslant \ln(1+x)$.

   En déduire que $\forall\, n \geqslant n_0,\ \displaystyle\sum_{k=n_0}^{n} \frac{1}{k} \geqslant \ln(n+1) - \ln(n_0)$.

   (d) Conclure que $\lim_{n \to +\infty} S_n = +\infty$.

5. En comparant les résultats des questions 2, 3 et 4, déterminer la valeur de λ, puis celle de la limite de la suite (S_n).

6. Ecrire un programme Maple calculant une valeur approchée de S_n pour des valeurs de n et p données.

   Transposez ce programme sur votre calculatrice et remplissez le tableau suivant.

	S_{10}	S_{20}	S_{30}	S_{40}	S_{50}
$p = 2$					
$p = 5$					

   Contrôler votre réponse à la question 5 (expliquer).

Exercice 2

Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer le nombre de triplets $(a, b, c) \in \mathbb{N}^3$ tels que $a + b + c = n$.

Par exemple, pour $n = 2$, il y a 6 triplets qui sont :

$$(2,0,0), (1,1,0), (1,0,1), (0,1,1), (0,2,0), (0,0,2)$$