

Devoir Libre N°7

Pour le mardi 9 janvier 2006

Pour tout n entier naturel, on note $W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^n dt$.

1. (a) Calculer W_0, W_1, W_2 et W_3 .
(b) En utilisant une intégration par parties, établir que $\forall n \in \mathbb{N}, W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} W_n$.
(c) En déduire un programme Maple permettant le calcul de W_{100} .
Transposer ce programme sur votre calculatrice, et donner une valeur approchée par défaut de W_{100} à la précision 10^{-5} .
Mêmes questions pour W_{101} .

2. (a) Prouver que $\forall p \in \mathbb{N}, W_{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p} (p!)^2} \frac{\pi}{2}$.
(b) Déterminer une expression similaire W_{2p+1} avec $p \in \mathbb{N}$.

3. (a) Montrer que la suite (W_n) est décroissante, puis qu'elle est convergente.
(b) Etablir que $\forall n \in \mathbb{N}, W_n W_{n+1} = \frac{\pi}{2(n+1)}$.
(c) En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} W_n$.

4. (a) Prouver que $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{n+1}{n+2} \leq \frac{W_{n+1}}{W_n} \leq 1$, puis que $W_{n+1} \sim W_n$.
(b) En déduire que $W_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.

5. On pose, pour tout n entier naturel non nul, $u_n = \frac{\sqrt{n} n^n e^{-n}}{n!}$ et $v_n = u_n e^{\frac{1}{12n}}$.
(a) Soient f et g les fonctions définies sur $[0, 1[$ par

$$f(x) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - x \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{x^3}{3(1-x^2)}.$$

Montrer que $\forall x \in [0, 1[, 0 \leq f(x) \leq g(x)$.

- (b) Vérifier que $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \exp\left[(2n+1)f\left(\frac{1}{2n+1}\right)\right]$ et que $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\exp\left[(2n+1)f\left(\frac{1}{2n+1}\right)\right]}{\exp\left[(2n+1)g\left(\frac{1}{2n+1}\right)\right]}$.
(c) En déduire les sens de variation des suites (u_n) et (v_n) .
(d) Prouver que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.
On pourra commencer par vérifier que $\forall n \in \mathbb{N}^, u_n \leq v_n$.*
(e) Justifier que la limite commune de ces deux suites, que l'on notera α , est strictement positive.

En déduire que : $n! \sim \frac{1}{\alpha} \sqrt{n} n^n e^{-n}$.

6. En utilisant les résultats des questions 2.a et 4.b, déterminer la valeur de α .