Math Sup PCSI - Le mardi 16 janvier 2007

Devoir Libre N°8

Pour le mardi 23 janvier 2007

Problème : calcul de $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{p=1}^{n}\frac{1}{p^2}$ **et de** $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{p=1}^{n}\frac{1}{p^4}$**.**

On désigne par n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

1. Soit a un réel tel que $\frac{a}{\pi}\notin\mathbb{Z}$.
   (a) Montrer que $e^{i(2n+1)a}=\sum\limits_{k=0}^{2n+1}\binom{2n+1}{k}\, i^k\,(\sin a)^k\,(\cos a)^{2n+1-k}$.
   (b) En déduire que $\sin[(2n+1)a]=(\sin a)^{2n+1}\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{2k+1}(-1)^k(\text{cotan } a)^{2n-2k}$.
2. On considère le polynôme $P_n=\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{2k+1}(-1)^kX^{n-k}$.
   (a) Prouver que, pour $p\in\{1,2,\ldots,n\}$, $x_p=(\text{cotan }\frac{p\pi}{2n+1})^2$ est racine de P_n.
   (b) En déduire que $\sum\limits_{p=1}^{n}x_p=\dfrac{n(2n-1)}{3}$.
3. (a) Etablir que $\forall\, t\in]0,\frac{\pi}{2}[$, $\sin t<t<\tan t$,
   puis que $\forall\, t\in]0,\frac{\pi}{2}[$, $(\text{cotan } t)^2<\frac{1}{t^2}<1+(\text{cotan } t)^2$.
   (b) En déduire que $\forall\, p\in\{1,2,\ldots,n\}$, $x_p<\frac{(2n+1)^2}{p^2\pi^2}<1+x_p$.
4. On considère $u_n=\sum\limits_{p=1}^{n}\dfrac{1}{p^2}$. Déterminer un encadrement de u_n, puis sa limite.
5. Ecrire un programme Maple calculant u_n, pour une valeur de n donnée.
   Transposez-le sur votre calculatrice, et calculez des valeurs approchées de u_5, u_{10}, u_{50}, u_{100} et u_{500} (on donnera les résultats avec un nombre **pertinent** de décimales).
   Contrôler votre résultat trouvé en 4.
6. (a) Prouver que $\sum\limits_{1\leqslant p<q\leqslant n}x_p\,x_q=\dfrac{n(n-1)(2n-1)(2n-3)}{30}$.
   (b) En déduire que $\sum\limits_{p=1}^{n}x_p^2=\dfrac{8n^4+16n^3-28n^2+9n}{45}$.
   (c) On considère $v_n=\sum\limits_{p=1}^{n}\dfrac{1}{p^4}$. Déterminer un encadrement de v_n, puis sa limite.
   (d) Modifier votre programme de la question 5 pour calculer des valeurs approchées de v_5, v_{10}, v_{50}, v_{100} et v_{500}.
   Contrôler votre résultat trouvé en c.