Devoir Libre N°9

Pour le mardi 6 février 2007

Résolution approchée d'une équation par la méthode de Newton.

Soient $I = [a, b]$ (avec $a < b$), et $f : I \to \mathbb{R}$ une application de classe C^2 sur I telle que :

(i) $f(a) < 0 < f(b)$ (ii) $\forall x \in I,\ f'(x) > 0$ (iii) $\forall x \in I,\ f''(x) > 0$.

1. (a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution ω sur I.

   (b) Prouver que $m = \min_{x \in I} f'(x)$ et $M = \max_{x \in I} f''(x)$ existent et sont strictement positifs.

2. On définit la suite (x_n) par $x_0 = b$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, x_{n+1} est l'abscisse du point d'intersection entre l'axe (Ox) et la tangente à C_f au point d'abscisse x_n.

   (a) Faire un dessin représentant le graphe de f, ω, x_0, x_1 et x_2.
   Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} = \varphi(x_n)$, avec $\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$.

   (b) Déterminer le sens de variation de φ sur $[\omega, b]$.
   Etablir que $\forall\, n \in \mathbb{N},\ x_n \in]\omega, b]$.

   (c) Déterminer le sens de variation de la suite (x_n).

   (d) En déduire que la suite (x_n) converge vers ω.

3. (a) Vérifier que $x_{n+1} - \omega = -\frac{f(x_n)+(\omega - x_n)f'(x_n)}{f'(x_n)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   (b) Soit $A \in \mathbb{R}$. On pose, pour $x \in I$, $\psi(x) = f(x) + (\omega - x)f'(x) - A\,(\omega - x)^2$.
   Déterminer la valeur à donner à A pour que $\psi(x_n) = 0$.
   En déduire que $\exists\, c \in]\omega, x_n[$: $f(x_n) + (\omega - x_n)f'(x_n) = -\frac{(\omega - x_n)^2}{2} f''(c)$.

   (c) Prouver que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant x_{n+1} - \omega \leqslant \frac{M}{2m}\,(x_n - \omega)^2$.

   (d) En utilisant 2.d, montrer que $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$: $x_{n_0} - \omega \leqslant \frac{m}{M}$.

   (e) En déduire que : $\forall n \geqslant n_0$, $0 \leqslant x_n - \omega \leqslant \frac{2m}{M}\left(\frac{1}{2}\right)^{2^{n-n_0}}$.

4. *Application.*
   On pose $a = 1$, $b = 2$, et $f(x) = x\,\ln(x) - 1$.

   Vérifier que les conditions (i), (ii), (iii) sont remplies, et préciser M et m.

   Ecrire un programme Maple calculant x_n, pour une valeur de n donnée.

   On note toujours ω l'unique solution de l'équation $f(x) = 0$ sur $[1, 2]$.
   Vérifier que $n_0 = 0$ convient (avec les notations de la question 3.d).
   En utilisant le résultat de la question 3.e, déterminer un entier n_1 tel que x_{n_1} soit une valeur approchée de ω à 10^{-6} près.
   Calculer x_{n_1} à l'aide de votre calculatrice (on en donnera une valeur approchée par défaut à la précision 10^{-6}).