Devoir Surveillé N°1

Durée 4 heures

Les calculatrices ne sont pas autorisées

Exercice I *Les questions 1, 2 et 3 sont indépendantes.*

1. Soit f la fonction qui à un nombre complexe z associe, lorsque c'est possible, $f(z) = \frac{z^2}{z-2i}$.
   (a) Préciser le domaine de définition de f.
   (b) Déterminer les racines carrées complexes de $8-6i$.
   (c) En déduire tous les antécédents de $1+i$ par f.

2. Soient a et θ deux réels, avec $\theta \in]0,2\pi[$, et n un entier naturel non nul.
   (a) Montrer que $1 + e^{i\theta} + e^{i2\theta} + \cdots + e^{in\theta} = e^{i\frac{n\theta}{2}}\ \frac{\sin(\frac{(n+1)\theta}{2})}{\sin(\frac{\theta}{2})}$.
   (b) En déduire que $\cos(a) + \cos(a+\theta) + \cos(a+2\theta) + \cdots + \cos(a+n\theta) = \frac{\cos(a+\frac{n\theta}{2})\ \sin(\frac{(n+1)\theta}{2})}{\sin(\frac{\theta}{2})}$.
   (c) A l'aide du résultat précédent, prouver que $\cos(\frac{\pi}{7}) + \cos(\frac{3\pi}{7}) + \cos(\frac{5\pi}{7}) = \frac{1}{2}$.

3. (a) Montrer que $\mathrm{ch}(x+y) = \mathrm{ch}(x)\,\mathrm{ch}(y) + \mathrm{sh}(x)\,\mathrm{sh}(y)$ et que $\mathrm{sh}(x+y) = \mathrm{sh}(x)\,\mathrm{ch}(y) + \mathrm{ch}(x)\,\mathrm{sh}(y)$.
   (b) Proposer, en les justifiant, des formules analogues pour $\mathrm{ch}(x-y)$ et $\mathrm{sh}(x-y)$.
   (c) Exprimer $\mathrm{ch}(2x)$ en fonction de $\mathrm{ch}(x)$ uniquement.
   (d) Déterminer une formule donnant $\mathrm{ch}(p) - \mathrm{ch}(q)$ sous la forme d'un produit.
   (e) Exprimer $\mathrm{th}(x+y)$ en fonction de $\mathrm{th}(x)$ et $\mathrm{th}(y)$.

Exercice II

1. Soit la fonction $g :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = \ln(x+1) - \ln(x) + \frac{x}{x+1}$.
   (a) Déterminer le tableau de variation de g.
   (b) En déduire que $\forall\, x > 0,\ g(x) > 1$.

2. Soit la fonction $f :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x\,[\ln(x+1) - \ln(x)]$.
   (a) Calculer $f'(x)$ pour $x > 0$.
   Vérifier que $f'(x) = g(x) + C$, où C est une constante à déterminer.
   (b) Vérifier que la fonction f est prolongeable par continuité en 0.
   La fonction f ainsi prolongée est-elle dérivable en 0 ?
   (c) Déterminer $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x}$.
   En déduire que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$.
   (d) Construire le tableau de variation de f, et tracer l'allure de son graphe.

3. On pose $u_n = (1+\frac{1}{n})^n$. Déterminer le sens de variation ainsi que la limite de la suite (u_n).

Exercice III

1. Prouver que $\forall x \in \mathbb{R}, \quad -1 \leqslant \frac{2x}{1+x^2} \leqslant 1$.

   Pour quelle(s) valeur(s) de x le réel $\frac{2x}{1+x^2}$ est-il égal à 1 ? à -1 ?

2. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \arcsin(\frac{2x}{1+x^2})$.
   (a) Etudier la parité de la fonction f.
   (b) Justifier que f est continue sur $\mathbb{R}$.
   (c) Justifier la dérivabilité de la fonction f sur un ensemble à préciser.
   Calculer l'expression de $f'(x)$.
   On en donnera une expression simplifiée en discutant suivant les valeurs de x.
   (d) Construire le tableau de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}^+$.
   (e) Prouver que $\forall x \in [0,1]$, $f(x) = 2\arctan x$.
   (f) Déterminer de même une expression simple de $f(x)$ sur $[1, +\infty[$.
   (g) Tracer l'allure du graphe de f sur $\mathbb{R}$.

3. (a) Montrer que l'équation $f(x) = \arccos x$ admet une unique solution α sur $]0,1[$.
   (b) Pour $x \in \mathbb{R}$, simplifier l'expression de $\cos(2\arctan x)$.
   (c) Etablir que $\alpha^3 + \alpha^2 + \alpha = 1$.

Exercice IV

A) Prouver que l'équation $x^3 + 3x^2 - 3x - 11 = 0$ admet une unique solution réelle, que l'on notera α.
(On rappelle que $1.4 < \sqrt{2} < 1.5$)

B) Soient p et q deux nombres réels.
On considère les équations $(E) \ : \ z^3 + p\,z + q = 0$ et $(E') \ : \ z^2 + q\,z - \frac{p^3}{27} = 0$.

1. Soient u et v dans $\mathbb{C}$ vérifiant les deux conditions : $\left\{\begin{array}{l} u^3 \text{ et } v^3 \text{ sont les racines de } (E') \\ \text{et} \\ u \times v \in \mathbb{R} \end{array}\right.$.

   (a) Calculer $u^3 + v^3$.
   (b) Vérifier que $u \times v = -\frac{p}{3}$.
   (c) En déduire que $u + v$ est une racine de l'équation (E).

2. Application 1 : on prend dans cette question $p = q = -6$.
   (a) Calculer les racines z_1 et z_2 de l'équation (E').
   (b) Donner l'expression des racines troisièmes de z_1 et de z_2.
   (c) En utilisant B) 1, déterminer trois racines de l'équation $z^3 - 6z - 6 = 0$.

3. Application 2 : on prend dans cette question $p = -3 \times 2^{\frac{1}{3}}$ et $q = 2$.
   Procéder comme en B) 2 pour déterminer trois racines de l'équation $z^3 - 3 \times 2^{\frac{1}{3}}\, z + 2 = 0$.
   Vérifier que ces trois racines sont réelles.

C) On considère l'équation $(E'') \ : \ z^3 + az^2 + bz + c = 0$ où a, b et c sont des réels.

1. Montrer qu'en posant $z' = z + m$, pour une valeur convenable de m, l'équation (E'') devient une équation de la forme (E) en z'.
   Préciser les valeurs de p et q correspondantes, en fonction de a, b et c.
2. En déduire trois racines de l'équation $z^3 + 3z^2 - 3z - 11 = 0$.
   En comparant au résultat de la question A), déterminer la valeur exacte de α.