Devoir Surveillé N°2

Durée 4 heures

Les calculatrices sont autorisées

Exercice 1

1. Résoudre l'équation différentielle $(E_1)\quad \mathrm{ch}(x)\, y' + 2\,\mathrm{sh}(x)\, y = 1$.
2. On cherche les solutions sur $\mathbb{R}^{+*}$ de l'équation différentielle $(E_2)\quad x\, y'' + 2\, y' - x\, y = 1$.
   (a) Soit y_0 la fonction définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $y_0(x) = \frac{\mathrm{ch}\, x}{x}$.
   Montrer que $x\, y_0''(x) + 2\, y_0'(x) - x\, y_0(x) = 0$.
   (b) Soit y une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$. On pose $z(x) = \frac{y(x)}{y_0(x)}$.
   En dérivant l'égalité $y(x) = y_0(x)\, z(x)$, montrer que : y solution de $(E_2) \Leftrightarrow z'$ solution de (E_1).
   (c) En déduire la forme générale des solutions de (E_2).

Exercice 2

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Soit a un réel tel que $|a| \geqslant 1$.
   On note Γ_a le cercle de centre $A(a, 0)$ et de rayon $\sqrt{a^2 - 1}$.
   (a) Déterminer une équation cartésienne de Γ_a.
   (b) Sur une même figure, tracer $\Gamma_{\frac{3}{2}}$, Γ_2, Γ_3, $\Gamma_{-\frac{3}{2}}$, Γ_{-2} et Γ_{-3}.
   (c) Soit $M(x_0, y_0)$ un point de Γ_a.
   Montrer que la tangente T à Γ_a en M a pour équation cartésienne : $(x_0 - a)\, x + y_0\, y = a x_0 - 1$.
   (d) On considère les points $C(1, 0)$ et $D(-1, 0)$. Etablir que pour tout point $M(x_0, y_0) \in \Gamma_a$, le rapport $\frac{MC}{MD}$ est une constante que l'on exprimera en fonction de a.
2. Soit b un réel, et Γ'_b le cercle de centre $B(0, b)$ passant par C et D.
   (a) Déterminer une équation cartésienne de Γ'_b.
   (b) Tracer Γ'_0, Γ'_1, Γ'_2, Γ'_{-1} et Γ'_{-2} sur la figure de la question 1.b.
   (c) Soit $M(x_0, y_0)$ un point de Γ'_b. Déterminer une équation cartésienne de la tangente T' à Γ'_b en M.
3. Soit $M(x_0, y_0)$ un point d'intersection de Γ_a et Γ'_b.
   Montrer que les tangentes en M à Γ_a et à Γ'_b sont orthogonales.

Problème A

Les parties I et II sont indépendantes.

Partie I

1. Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation différentielle : (E) : $\quad (1 + x^2)\, y' + 2x\, y = \frac{1}{x}$.
2. Pour tout réel λ, on définit la fonction f_λ sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $\forall\, x > 0,\ \ f_\lambda(x) = \frac{\ln(x) + \lambda}{1 + x^2}$.
   (a) Vérifier que pour tout $x > 0$, $f'_\lambda(x)$ est du signe de $g_\lambda(x) = 1 + x^2 - 2x^2\, [\ln(x) + \lambda]$.
   (b) Etudier les variations de g_λ.
   Etablir que l'équation $g_\lambda(x) = 0$ admet une et une seule solution sur $\mathbb{R}_+^*$, notée m_λ.
   (c) Dresser le tableau de variation de f_λ.
   On calculera les limites de f_λ en 0 et $+\infty$, et on montrera que $f_\lambda(m_\lambda) = \frac{1}{2 m_\lambda^2}$.
   (d) Déterminer la valeur exacte de m_1, ainsi que, à l'aide de votre calculatrice, des valeurs arrondies à 10^{-2} près de m_0 et de m_{-1}.
   (e) Représenter sur une même figure les graphes de f_{-1}, f_0 et f_1.

Partie II On étudie dans cette partie la fonction F définie par :

$$\forall\, x > 0, \quad F(x) = \int_1^x \frac{\ln t}{1+t^2}\, dt.$$

1. Justifier la dérivabilité de F sur $\mathbb{R}_+^*$, et calculer $F'(x)$.
   Préciser le sens de variation de F sur $\mathbb{R}_+^*$, ainsi que le signe de $F(x)$.
2. (a) Montrer que : $\forall\, x > 0$, $F(x) = \arctan x\, \ln x - \displaystyle\int_1^x \frac{\arctan t}{t}\, dt$.

   (b) Prouver que $\displaystyle\lim_{t\to 0} \frac{\arctan t}{t} = 1$.

   Ceci prouve l'existence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\arctan t}{t}\, dt$, que l'on notera ℓ.

   (c) Prouver que $\displaystyle\lim_{x\to 0} F(x) = \ell$.

   (d) Préciser $\displaystyle\lim_{x\to 0} F'(x)$.
   Qu'en déduit-on sur le graphe de F ?
3. Montrer que : $\forall\, x > 0$, $F(x) = F(\frac{1}{x})$.
   En déduire $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} F(x)$.
4. En admettant que $\ell \approx 0.92$, tracer l'allure du graphe de F.

Problème B

On note E l'ensemble des applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant la propriété :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x+y) = \frac{f(x)+f(y)}{1+f(x)f(y)}$$

1. Montrer que la fonction th appartient à E.
2. Déterminer les fonctions constantes appartenant à E.
3. Soit $f \in E$ tel qu'il existe un réel a pour lequel $f(a) = \pm 1$.
   Montrer qu'alors f est une fonction constante.

On suppose dans la suite du problème que f est une fonction **non constante** *appartenant à E.*

4. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$. En écrivant $x = \frac{x}{2} + \frac{x}{2}$, montrer que $f(x) \in]-1,1[$.

   (b) Montrer que $f(0) = 0$, et que f est impaire.

   (c) On pose $b = \frac{1+f(1)}{1-f(1)}$.
   Vérifier que $b > 0$, puis démontrer par récurrence que $\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad f(n) = \frac{b^n - 1}{b^n + 1}$.

   (d) En déduire $\displaystyle\lim_{n\to +\infty} f(n)$.
   (*On discutera suivant les valeurs possibles de b.*)

5. On suppose dans cette question que f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et on pose $k = f'(0)$.

   (a) Montrer que $\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = k\,(1 - [f(x)]^2)$.

   (b) En déduire que f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]-1,1[$.

   (c) Etablir que sa bijection réciproque f^{-1} est dérivable sur $]-1,1[$, et que

   $$\forall\, y \in]-1,1[, \quad (f^{-1})'(y) = \frac{1}{k\,(1-y^2)}.$$

   (d) En déduire, en fonction de k, l'expression de $f^{-1}(y)$ pour $y \in]-1,1[$,
   puis celle de $f(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.