Math Sup PCSI - Le vendredi 1^{er} décembre 2006

Devoir Surveillé N°3

Durée 4 heures

Les calculatrices ne sont pas autorisées

Problème A

Le plan $\mathcal{P}$ est muni d'un repère orthonormé direct $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$.

On note (Γ) la courbe de paramétrage $\begin{cases} x(t) = \dfrac{1}{2}\,(t^2 - 2t) \\ y(t) = \dfrac{1}{3}\,t^3 - \dfrac{1}{2}t^2 \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$

et $M(t)$ le point de (Γ) de paramètre t.

1. Quelles sont les valeurs de t pour lesquelles le point $M(t)$ est singulier ?
2. Soit $t \in \mathbb{R}$. Déterminer une équation cartésienne de la tangente à (Γ) au point $M(t)$.
3. Etudier et tracer la courbe (Γ).
4. Soient t et t' deux réels.
   (a) Montrer que les tangentes à (Γ) en $M(t)$ et $M(t')$ sont perpendiculaires si, et seulement si,
   $$1 + t \times t' = 0.$$
   (b) Soit P le point d'intersection de ces deux tangentes, lorsquelles sont perpendiculaires. Démontrer que le point P décrit une courbe Ω paramétrée par :
   $$\begin{cases} x_P(t) = \dfrac{t^4 - 3t^3 - t^2 + 3t + 1}{6t^2} \\ y_P(t) = \dfrac{-t^2 + 3t + 1}{6t} \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}^*)$$
5. (a) Montrer que Ω est inclus dans la conique Δ d'équation
   $$6y^2 - 3y - x + \frac{1}{6} = 0.$$
   (b) Réciproquement, montrer que $\Delta \subset \Omega$.
6. Etudier et tracer la conique Δ, en précisant ses éléments.

Problème B *Les parties I et II sont indépendantes.*

Partie I

1. Résoudre l'équation différentielle : $(E_1) \quad y' + \mathrm{th}(t)\, y = 0$.
   Préciser la solution y_1 de cette équation vérifiant $y_1(0) = 1$.

2. Résoudre l'équation différentielle : $(E_2) \quad y' + \mathrm{th}(t)\, y = t\,\mathrm{th}(t)$.
   Préciser la solution y_2 de cette équation vérifiant $y_2(0) = 0$.

Partie II

Pour $k \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}^+$, on pose $I_k(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{dt}{ch^k t}$.

1. Justifier que la fonction I_k est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et préciser sa dérivée.
   Quel est le sens de variation de la fonction I_k ?

2. Montrer que $\forall\, x \in \mathbb{R}^+$, $I_1(x) = 2\arctan(e^x) + c$, où c est une constante à déterminer.
3. Calculer $I_2(x)$.
4. En utilisant une intégration par parties, établir que

$$\forall\, k \in \mathbb{N}^*, \forall\, x \in \mathbb{R}^+, \quad I_{k+2}(x) = \frac{th\, x}{(k+1)\, ch^k x} + \frac{k}{k+1} I_k(x).$$

   On pourra remarquer que $\frac{1}{ch^k t} = \frac{ch\ t}{ch^{k+1} t}$.
5. En déduire $I_3(x)$ et $I_4(x)$.
6. Soit k fixé dans $\mathbb{N}^*$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = I_k(n)$.
   (a) Justifier que la suite (u_n) est croissante.
   (b) Démontrer que

$$\forall\, t \in \mathbb{R}^+, \quad \frac{1}{ch\, t} \leqslant 2\, e^{-t}.$$

   En déduire que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant \frac{2^k}{k}$, puis que la suite (u_n) converge.

   On notera $\ell_k = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} I_k(n)$.
   (c) Calculer ℓ_1 et ℓ_2.
   (d) Prouver que $\forall\, k \in \mathbb{N}^*$, $\ell_{k+2} = \frac{k}{k+1}\, \ell_k$.
   (e) Montrer que $\forall\, p \in \mathbb{N}$, $\ell_{2p+1} = \frac{(2p)!}{[2^p\ p!]^2}\ \frac{\pi}{2}$.
   (f) Déterminer une expression similaire pour ℓ_{2p} avec $p \in \mathbb{N}^*$.

Problème C

Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on considère la fonction $f_p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par la relation de récurrence :

$$\begin{cases} \forall\, x \in \mathbb{R},\ f_0(x) = 1 \\ \forall\, p \in \mathbb{N}^*, \quad \forall\, x \in \mathbb{R},\ f_p'(x) = p\, f_{p-1}(x) \ \text{ et } \ \displaystyle\int_0^1 f_p(x)\, dx = 0 \end{cases}$$

1. Justifier que $f_1(x) = x - \frac{1}{2}$, et que $f_2(x) = x^2 - x + c$, où c est une constante à déterminer.
   Calculer de même $f_3(x)$ et $f_4(x)$.
2. Prouver que, pour tout p entier naturel supérieur ou égal à 2, $f_p(0) = f_p(1)$.
3. En raisonnant par récurrence sur p, établir que, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$,

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f_p(x+1) - f_p(x) = p\, x^{p-1}.$$

4. Pour tous les entiers naturels non nuls n et p, on note $S_n(p) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^{p-1}$.
   (a) Donner des expressions simples de $S_n(1)$ et $S_n(2)$.
   (b) Montrer que $S_n(p) = \frac{1}{p}\, [f_p(n+1) - f_p(1)]$.
   (c) En déduire les expressions de $S_n(3)$ et de $S_n(4)$. (*On donnera celles-ci sous forme factorisée.*)
5. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on pose $b_p = f_p(0)$.
   (a) Prouver que, $\forall\, p \in \mathbb{N}$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $f_p(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} \tbinom{p}{k}\, b_k\, x^{p-k}$.
   (b) En déduire que $\forall\, p \geqslant 2$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{p-1} \tbinom{p}{k}\, b_k = 0$.
   (c) En utilisant vos résultats de la question 1, préciser les valeurs de b_0, b_1, b_2, b_3 et b_4.
   Utiliser la formule du 5.b pour calculer b_5, puis préciser l'expression de $f_5(x)$, et enfin celle de $S_n(5)$ (toujours sous forme factorisée).