Math Sup PCSI - Le vendredi 2 février 2007

Devoir Surveillé N°5

Durée 4 heures

Les calculatrices ne sont pas autorisées

Premier problème

Partie I Soit $f : t \in \mathbb{R} \mapsto \frac{e^t}{1+t^2}$. Nous noterons C_f la courbe représentative de f.

1. Justifier que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.
   Quelle est la limite de $f(t)$ lorsque t tend vers $-\infty$? Qu'en déduisez-vous au sujet de C_f ?
2. Quelle est la limite de $f(t)$ lorsque t tend vers $+\infty$?
3. Expliciter $f'(t)$ et dresser le tableau des variations de f.
4. Vérifier que $f''(t) = \frac{(t-1)\,g(t)\,e^t}{(1+t^2)^3}$, où $g(t)$ est une expression à déterminer.
5. Montrer que l'équation $g(t) = 0$ admet une unique solution réelle, notée α. Prouver que $-\frac{1}{5} < \alpha < 0$.
6. Tracer l'allure de C_f.
   On fera en particulier apparaître ses points d'inflexion (justifier votre réponse).

Partie II Au vu des expressions de $f(t)$, $f'(t)$ et $f''(t)$, nous nous proposons d'établir que l'assertion $\mathcal{A}(n)$ suivante est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{\text{Il existe un polynôme } P_n \text{ tel que } f^{(n)}(t) = \frac{P_n(t)\,e^t}{(1+t^2)^{n+1}} \quad \text{pour tout } t \in \mathbb{R}}$$

Vous allez raisonner par récurrence sur n.

7. Il est clair que $\mathcal{A}(n)$ est vraie pour $n \in \{0, 1, 2\}$; vous dresserez simplement un tableau donnant l'expression de P_n pour ces valeurs de n.
8. Fixons $n \in \mathbb{N}$, et supposons l'assertion $\mathcal{A}(n)$ acquise. Etablissez l'assertion $\mathcal{A}(n+1)$; vous déterminerez l'expression de P_{n+1} en fonction de P_n et P'_n.

Il en résulte donc que l'assertion $\mathcal{A}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

9. Préciser le degré et le coefficient dominant de P_n.
10. Déterminer une expression simple de $c_n = P_n(i)$.
11. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.
    (a) Vérifier que $\forall\, t \in \mathbb{R}$, $(1+t^2)f'(t) = (t-1)^2 f(t)$.
    (b) Montrer que : $[(t-1)^2 f(t)]^{(n)} = (t-1)^2\, f^{(n)}(t) + 2n(t-1)\, f^{(n-1)}(t) + n(n-1)\, f^{(n-2)}(t)$.
    (c) Calculer de même : $[(1+t^2)f'(t)]^{(n)}$.
    (d) En déduire une relation de la forme $P_{n+1}(t) = e_1\, P_n(t) + e_2\, P_{n-1}(t) + e_3\, P_{n-2}(t)$
    où e_1, e_2, e_3 sont trois expressions, dépendantes de n et t, à déterminer.

Partie III Notons $F : x \in \mathbb{R} \mapsto \displaystyle\int_0^x f(t)\, dt$.

12. Quel est le sens de variation de F ?
13. Montrer que $F(x)$ possède une limite finie ℓ lorsque x tend vers $-\infty$. Prouvez l'encadrement $-1 \leqslant \ell \leqslant 0$.

Nous nous proposons d'étudier le comportement de $F(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

Notons $J(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{t\,e^t}{(1+t^2)^2}\, dt$, $K(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{e^t}{t^3}\, dt$ et $L(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{e^t}{t^4}\, dt$.

14. Prouver l'existence d'une constante A telle que $F(x) = f(x) + A + 2J(x)$ pour tout réel x.
15. Pour $x \geqslant 1$, placez les uns par rapport aux autres les réels 0, $J(x)$ et $K(x)$.
16. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que $K(x) - 3L(x)$ est négligeable devant $\frac{e^x}{x^2}$ lorsque x tend vers $+\infty$.
17. En découpant l'intervalle $[1, x]$ sous la forme $[1, x^{3/4}] \cup [x^{3/4}, x]$, montrer que $L(x)$ est négligeable devant $\frac{e^x}{x^2}$ lorsque x tend vers $+\infty$.
18. En déduire un équivalent simple de $F(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.
19. Tracer l'allure de la courbe représentative de F.

Deuxième problème

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$, et on désigne par (Γ) l'hyperbole d'équation $y=\frac{1}{x}$.
Le but du problème est de construire les triangles équilatéraux dont les trois sommets appartiennent à (Γ).

Partie I

On considère $M_1(x_1,\frac{1}{x_1})$, $M_2(x_2,\frac{1}{x_2})$, $M_3(x_3,\frac{1}{x_3})$ trois points quelconques de (Γ), deux à deux distincts.

1. Soit $G(\alpha,\beta)$ le centre de gravité du triangle $(M_1M_2M_3)$, défini par la relation $\overrightarrow{GM_1}+\overrightarrow{GM_2}+\overrightarrow{GM_3}=\vec{0}$.
   Déterminer les expressions de α et β en fonction de x_1,x_2,x_3.
2. Soit $H(\lambda,\mu)$ l'orthocentre du triangle $(M_1M_2M_3)$, point de concours des hauteurs.
   (a) Déterminer, en fonction de x_1,x_2,x_3, une équation cartésienne de la hauteur issue de M_1 du triangle $(M_1M_2M_3)$, puis de la hauteur issue de M_2.
   (b) En déduire que $\lambda=-\frac{1}{x_1x_2x_3}$, et que $H\in(\Gamma)$.

Partie II

Soient r un réel non nul et P le polynôme défini par $P(X)=X^3-3rX^2-\frac{3}{r^2}X+\frac{1}{r}$.

3. On suppose dans cette question que $r>0$.
   (a) Déterminer les signes de $P(0)$ et de $P(r)$.
   Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}P(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}P(x)$.
   En déduire qu'il existe un réel $u>r$ tel que $P(u)>0$, et un réel $v<0$ tel que $P(v)<0$.
   (b) Conclure que les racines de P sont trois nombres réels distincts non nuls.
4. On suppose dans cette question que $r<0$. En vous inspirant de la démarche précédente, montrer que les racines de P sont toujours trois nombres réels distincts non nuls.
5. On note a,b,c les trois racines réelles distinctes non nulles du polynôme P.
   Calculer, en fonction de r, les trois quantités $a+b+c$, $a\times b\times c$ et $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$.
6. On définit les points $A(a,\frac{1}{a})$, $B(b,\frac{1}{b})$ et $C(c,\frac{1}{c})$ de (Γ).
   (a) En utilisant les résultats de la partie I, prouver que les coordonnées du centre de gravité G du triangle (ABC) sont $(r,\frac{1}{r})$.
   Déterminer de même, en fonction de r, les coordonnées de l'orthocentre H, du triangle (ABC).
   (b) Conclure que le triangle (ABC) est équilatéral.

Partie III

On conserve les notations de la partie II.

7. On suppose dans cette question que $r=1$. Calculer alors les racines a,b,c du polynôme P.
   Représenter sur un même dessin l'hyperbole (Γ), le triangle (ABC) et le point G.
   (*On rappelle que* $\sqrt{3}\approx 1.73$ *à* 10^{-2} *près.*)
8. Mêmes questions pour $r=-1$.

On suppose désormais que r est différent de 1 et -1.
Notons $(\mathcal{C})$ le cercle circonscrit au triangle (ABC) et R son rayon.

9. Calculer, en fonction de r, les deux quantités $a^2+b^2+c^2$ et $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}$.
10. Le triangle (ABC) étant équilatéral, G est aussi le centre de $(\mathcal{C})$, et donc $R=GA=GB=GC$.
    En écrivant que $R^2=\frac{1}{3}(GA^2+GB^2+GC^2)$, montrer que $R^2=4r^2+\frac{4}{r^2}$.
    En déduire une équation cartésienne de $(\mathcal{C})$ dépendant uniquement de r.
11. On pose $Q(X)=X^4-2rX^3-3(r^2+\frac{1}{r^2})X^2-\frac{2}{r}X+1$.
    Vérifier que Q admet $-r$ pour racine, et déterminer le polynôme Z tel que $Q(X)=(X+r)\,Z(X)$.
    Comparer P et Z, et en déduire les racines du polynôme Q.
    Justifier que toutes ces racines sont distinctes.
12. Montrer que le cercle $(\mathcal{C})$ passe par un point D de l'hyperbole (Γ) distinct de A, B, C.
    Quelle relation géométrique relie les points G et D ?
13. Tracer sur une même figure l'hyperbole (Γ) et le point G, puis expliquer comment on peut contruire le triangle équilatéral (ABC) à l'aide uniquement d'une règle et d'un compas.