E3 – Théorèmes relatifs aux réseaux linéaires en régime continu

I–Réseaux Linéaires en régime Continu

L'objet de ce chapitre est de mettre en place les méthodes et les outils permettant de déterminer les intensités des courants dans les différentes branches d'un circuit , ainsi que les tensions aux bornes des dipôles.

• Ce chapitre concerne les circuits soumis à des régimes CONTINUS et dont les composants (générateurs st récepteurs) sont LINÉAIRES.

• La généralisation de certains résultats à des régimes variables sera vue dans les chapitres ultérieurs .
II s'agira de régimes (variables) *permanents* : régimes dans lesquels les grandeurs dépendent du temps, les variations étant permanentes au cours du temps (ex : le régime permanent sinusoïdal).

• Réseaux linéaires : en pratique, ils sont constitués par des :
- dipôles actifs linéaires (sources de tension, source de courant, . . .)
- dipôles passifs linéaires (résistances, bobines, condensateurs, . . .)
- AO en régime linéaires. . .

• En régime continu (= stationnaire), on a vu qu'une bobine (idéale) se comporte comme un interrupteur fermé[1] alors qu'un condensateur (idéal) se comporte comme un interrupteur ouvert[2].
→ Si on rencontre de tels composants dans un réseau en régime continu, il suffit de remplacer toute bobine par un court-circuit et de ne considérer aucune branche contenant un condensateur puisqu'aucun courant ne la traverse (circuit ouvert).
Comme une L ou un C on peu d'intérêt en régime continu, on se limitera, dans cette leçon, aux régimes continus de réseaux constitués par les éléments (e_j,η_j,R_j).

• Rappel des Lois de KIRCHOFF pour un réseau quelconque[3]:

Loi des nœuds : $\sum_k \epsilon_k i_k = 0$ avec : $\left| \begin{array}{ll} \epsilon_k = +1 & \text{pour } i_k \text{ orientée vers un nœud} \\ \epsilon_k = -1 & \text{sinon} \end{array} \right.$

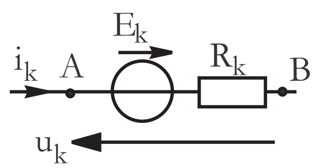
Loi des mailles : $\sum_k \epsilon_k u_k = 0$ avec : $\left| \begin{array}{ll} \epsilon_k = +1 & \text{pour } u_k \text{ orientée dans le sens de parcours de la maille} \\ \epsilon_k = -1 & \text{sinon} \end{array} \right.$

II–Utilisation Directe des lois de Kirchoff

1 Principe de calcul

• La résolution consiste à déterminer les courants circulant dans chaque branche du réseau.

Chaque branche ne contient que des résistors et des générateurs linéaires.
Donc, pour la branche k, étudiée en convention récepteur, considérée sous son modèle de THÉVENIN équivalent :



$$u_k = R_k i_k - E_k$$

1. cf. E2–I.2°)a)
2. cf. E2–I.3°)a)
3. elles fournissent TOUS les théorèmes qui sont développés dans cette leçon !!

où $E_k \equiv$ *f.é.m.* du générateur de Thévénin équivalent à tous les générateurs de la branche numéro k;
et $R_k \equiv$ résistance équivalente aux résistances de la branche numéro k.

On aurait très bien pu privilégier une modélisation de Norton pour l'étude du générateur équivalent de la branche k; alors serait apparu η_k, le *c.é.m.* de la branche k.

• Les *données* du problèmes sont donc $\{(E_k \text{ ou } \eta_k;\ R_k)\}$.

Et les *inconnues* (ce que l'on cherche!) sont les intensités $\{i_k\}$ dans les différentes branches.

→ Le nombre d'inconnues ≡ le nombre de branches du réseaux (appelons ce nombre N).

→ Il faut donc établir N équations linéaires <u>indépendantes</u> , liant les inconnues $\{i_k\}$, grâce aux lois de Kirchoff. Pour cela, on dispose :
- des lois des nœuds : $\sum_k \epsilon_k i_k = 0$.
- des lois des mailles : $\sum_k \epsilon_k u_k = 0 \Longleftrightarrow \sum_k \epsilon_k (Ri_k - E_k) = 0$

Soit n le nombre de nœuds du réseau. On montre que :

(1) les lois des nœuds permettent d'écrire $(n-1)$ équations linéaires INDÉPENDANTES;

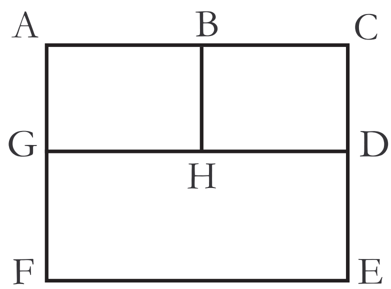
(2) les autres équations linéaires INDÉPENDANTES, au nombre de $N-(n-1) = N-n+1$, sont données par la loi des mailles appliquée à des mailles "convenablement" choisies;

(3) il faut que les mailles choisies soit "indépendantes" : il faut que l'ensemble des mailles choisies fasse intervenir TOUTES les branches du réseau, sans en oublier aucune.

<u>Ex :</u> Il y a 4 nœuds : B, D, G et H et 6 branches (donc 6 inconnues).

→ $4-1=3$ lois des nœuds indépendantes.

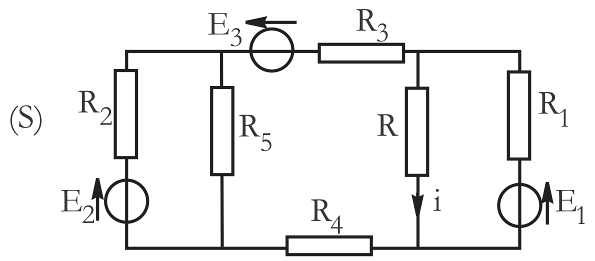
→ $6-3=3$ lois des mailles indépendantes.
Par exemple : $(ABHGA)$, $(BCDHB)$ et $(DEFGHD)$.
Ou bien : $(ABHGA)$, $(BCDHB)$ et $(ABCDEFGA)$.



Par contre, on ne peut pas choisir : $(ABHGA)$, $(DEFGHD)$ et $(ABHDEFGA)$, car la branche (BCD) a été oubliée et donc, les trois mailles choisies ne sont pas indépendantes !

2 Exemple d'application

Dans le réseau linéaire ci-contre, on cherche à déterminer i, l'intensité du courant dans la branche contenant le résistor de résistance R, en appliquant les lois de Kirchoff.



(1) avant d'appliquer les lois de Kirchoff, *simplifier* si possible le schéma du réseau en utilisant :
- les transformations "Modèle de Thévenin⟷ Modèle de Norton"
- les règles d'association des dipôles.

V–Théorème de superposition (des états)

1 Énoncé

• soit un réseau linéaire, constitué de :
- résistances R_i,
- p sources indépendantes de tension de *f.é.m.* E_m,
- q sources indépendantes de courant de *c.é.m.* η_n.

Le réseau est décrit par un système d'équations linéaires indépendantes ($\mathcal{S}$), ce système ($\mathcal{S}$) liant les intensités des courants i_k de chaque branche k aux *f.é.m.*, *c.é.m.* (et R_i).

Ainsi, pour une branche k donnée, l'intensité i_k qui la traverse est une combinaison linéaire (C.L.) des *f.é.m.* et *c.é.m.* :

$$i_k = a_1E_1 + a_2E_2 + \ldots + a_mE_m + \ldots + a_pE_p + b_1\eta_1 + b_2\eta_2 + \ldots + b_n\eta_n + \ldots + b_q\eta_q$$

Soit :

$$i_k = \sum_{m=1}^{p} a_mE_m + \sum_{n=1}^{q} b_n\eta_n$$

avec a_m, $b_n = f(R_i)$: les cœfficients a_m et b_n dépendent des résistances du réseau.

• Dans l'écriture précédente traduisant la linéarité des équations de Kirchhoff, il apparaît une interprétation très intéressante de i_k, intensité dans la branche k considérée :

chaque terme a_mE_m peut être interprété comme étant le courant circulant dans la branche k considérée, *lorsque toutes les autres* f.é.m. *et* c.é.m. *sont nulles*, c'est-à-dire, lorsque toutes les sources indépendantes sont éteintes sauf la source de tension numéro m;

et chaque terme $b_n\eta_n$ peut être interprété comme étant le courant circulant dans la branche k considérée, *lorsque toutes les autres* f.é.m. *et* c.é.m. *sont nulles*, c'est-à-dire, lorsque toutes les sources indépendantes sont éteintes sauf la source de courant numéro n.

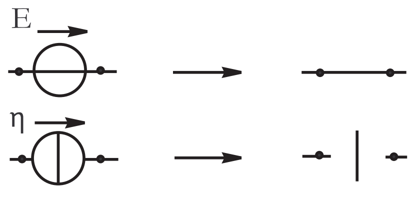
> Énoncé du théorème de superposition :
> Dans un réseau linéaire comportant plusieurs sources indépendantes :
>
> • L'intensité du courant circulant dans une branche est la somme des intensités produites par chaque source *indépendante* supposée seule, les autres sources *indépendantes* étant "éteintes".
>
> • La tension aux bornes d'un dipôle est la somme des tensions produites par chaque source *indépendante* supposée seule, les autres sources *indépendantes* étant "éteintes".

2 Commment éteindre une source indépendante ?

• Une source indépendante (ou libre) de tension est éteinte lorsqu'on la remplace par un court-circuit.

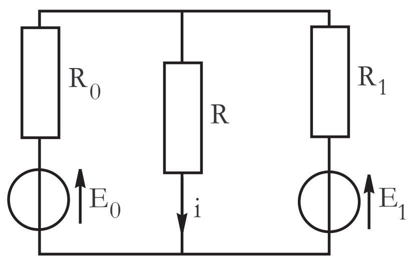
• Une source indépendante (ou libre) de courant est éteinte lorsqu'on la remplace par un circuit ouvert.

→ Pour "éteindre" par la pensée une source libre, il suffit d'enlever le cercle de son schéma !

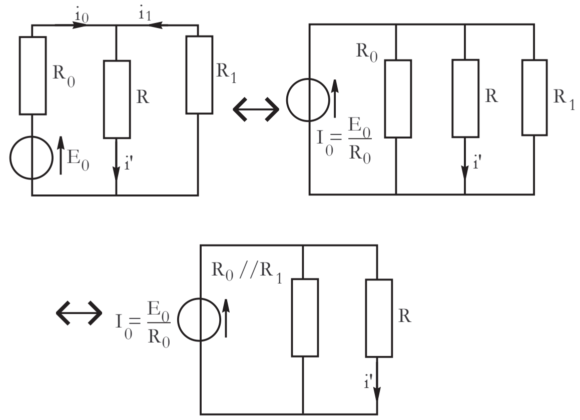


3 Application

Retour sur l'exemple du II.2°) : expression de i ?
Souvenons-nous que nous étions arrivés au schéma équivalent simplifié suivant :
Il apparaît que i peut s'écrire, par application du théorème de superposition : $i = i' + i''$,
où $i' \equiv$ courant circulant dans R lorsque E_1 est éteinte,
et $i'' \equiv$ courant circulant dans R lorsque E_0 est éteinte.



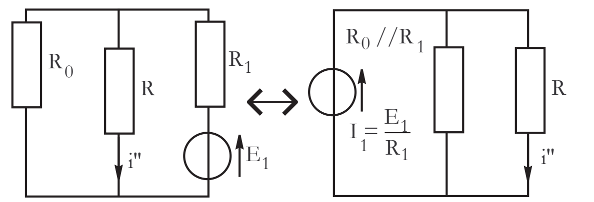
(a) Schéma avec E_1 éteinte : Il apparaît un montage Diviseur de Courant :



$$i' = \frac{R_0//R_1}{R + R_0//R_1}.I_0 = \frac{R_1 R_0}{R_0 + R_1}.\frac{1}{R + \frac{R_1 R_0}{R_0 + R_1}}.\frac{E_0}{R_0}$$

$$i' = \frac{R_1 E_0}{R(R_1 + R_0) + R_1 R_0} = \frac{R_1 E_0}{RR_1 + RR_0 + R_1 R_0}$$

(b) Schéma avec E_0 éteinte : même raisonnement



$$i'' = \frac{R_0 E_1}{RR_1 + RR_0 + R_1 R_0}$$

→ On retrouve bien :

$$\boxed{i = \frac{R_0 E_1 + R_1 E_0}{R(R_1 + R_0) + R_1 R_0}}$$

4 Remarques

• pour appliquer le Théorème de Superposition, il faut, au moins, deux sources libres.
• On n'éteint que les sources libres.
• Le théorème de Superposition allié aux relations des Ponts Diviseurs (de tension/de courant) évitent souvent la résolution de systèmes d'équations àplusieurs inconnues (comparer II.2°) et V.3°)).
• Mais la Loi des Nœuds en Termes de Potentiels est souvent plus simple encore (comparer IV.1°)c) et V.3°)).
Et ce, surtout lorsqu'il y a des sources liées !! (cf. EXE3)

5 Autre application

Considérons le montage Soustracteur ci-contre où l'AO fonctionne en régime linéaire et est idéal.