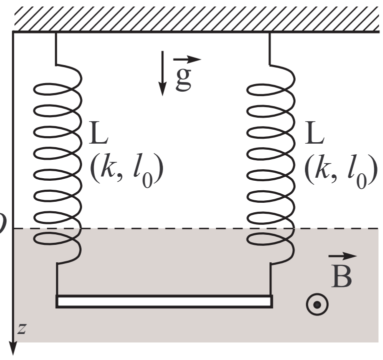
EXERCICES COLLES PC – S10 : Induction

EXS10.1 **Barre et ressorts dans un champ magnétique uniforme** (A. Colin, p. 38)

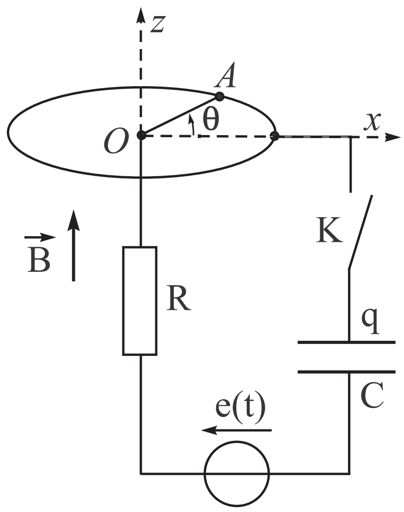
Une barre conductrice de masse m, de longueur a, de résistance négligeable, est suspendue à deux ressorts de raideur k, de longueur à vide l_0 et d'inductance propre (supposée constante) L.
On oriente la verticale Oz vers le bas et on choisit l'origine $z = 0$ à la position d'équilibre de la barre dans le référentiel terrestre.



1) Déterminer l'équation du mouvement la barre **dans le cas où celle-ci demeure dans le demi espace z > 0** où règne un champ magnétique uniforme $\overrightarrow{B} = B\overrightarrow{e_z}$.
On posera $\omega^2 = \dfrac{2k}{m}$ et $\omega^2 = \dfrac{B^2a^2}{2mL} + \omega_0^2$.
2) À l'instant initial $t = 0$, la barre est tirée vers la bas de $z(0) = d$ par rapport à sa position d'équilibre et abandonnée sans vitesse initiale.
Déterminer $z(t)$ et $i(t)$. Réponse partielle : $i(t) = \dfrac{Bad}{2L}\left(\dfrac{\omega_0}{\omega}\right)^2(1 - \cos(\omega t))$.
3) Faire un bilan énergétique.

EXS10.2 **Amortissement par induction** (d'après A. Colin, p. 39)

La barre $\{OA\}$, de masse m et de longueur a, peut tourner librement autour de l'axe vertical (Oz) par rapport auquel son moment d'inertie est $J = \dfrac{1}{3}ma^2$. Son extrémité A s'appuyant sans frottement sur le cercle de centre O et de rayon a.
La barre et le cercle sont conducteurs et sont fermés sur un générateur, qui délivre une tension sinusoïdale $e(t) = E_0\sin(\omega t)$, par l'intermédiaire d'un circuit comportant, en série, une résistance R et une capacité C. Les résistances de la barre et du cercle sont négligées devant R et on ne tiendra pas compte des phénomènes d'autoinduction.
$\overrightarrow{B} = B\overrightarrow{e_z}$ est un champ magnétique vertical uniforme et permanent.
On ferme l'interrupteur à l'instant $t = 0$, le condensateur n'étant pas chargé et la barre étant au repos.

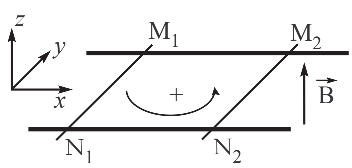


On posera $I_0 = \dfrac{E_0}{R}$, $\tau = RC$, $\tau' = \dfrac{\tau}{1 + \dfrac{3}{4m}B^2a^2C}$ et $Q_0 = \tau' I_0$.

1) Déterminer la force électromotrice d'induction $e_{A\to O}$.
2) Établir l'équation différentielle vérifiée par q en fonction de $e(t)$, $\Omega = \dot{\theta}$, a, B, R et C.
3) Montrer que $\Omega = -\dfrac{3}{2}\dfrac{B}{m}q$.
4) Établir $q(t)$, charge du condensateur, et $\Omega(t)$, vitesse angulaire de rotation de la barre.
5) Faire un bilan énergétique du système et le commenter.

EXS10.3 **Système deux barre mobiles :** (A. Colin, p. 40)

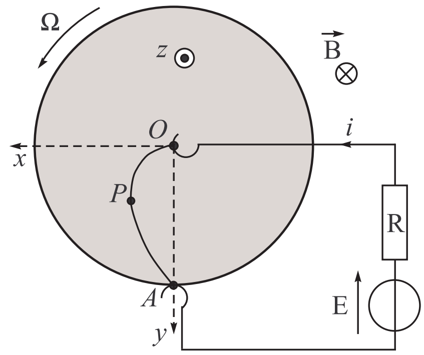
Deux barres conductrices identiques $\mathcal{T}_1 = \{M_1N_1\}$ et $\mathcal{T}_2 = \{M_2N_2\}$ parallèles, de résistance $\dfrac{R}{2}$ et de masse m chacune, peuvent glisser sans frottement sur deux rails conducteurs, perpendiculaires aux barres et parallèles entre eux, distants de a et de résistance négligeable.



L'ensemble est plongé dans un champ magnétique uniforme et constant $\overrightarrow{B} = B\overrightarrow{e_z}$, orthogonal aux rails et aux barres. On néglige l'inductance propre du circuit.
→ Étudier le mouvement $\{v_2(t), x_2(t)\}$ de la barre $\mathcal{T}_2$ lorsqu'on communique, très rapidement (*percussion*), la vitesse $\overrightarrow{v}_1(0^+) = v_{01}\overrightarrow{e_x}$ à $\mathcal{T}_1$.

EXS10.4 **Disque de FARADAY** (A. Colin, p. 40 ; P. Krempf, p. 158-159)

Un disque métallique homogène $\mathcal{D}$, de rayon a, de masse m, de moment d'inertie $J = \frac{1}{2}ma^2$ par rapport à son axe $\Delta = Oz$, peut tourner sans frottement autour de Δ. Un générateur de tension idéal, de *f.é.m.* E constante, est relié au disque par deux contacts fixes glissant comme le montre la figure ci-contre. La résistance totale du circuit parcouru par un courant d'intensité i est R et son inductance propre est négligeable. L'ensemble est soumis à un champ magnétique uniforme $\overrightarrow{B} = -B\overrightarrow{e_z}$ et constant ($B = cte$).



1) Calculer $\overrightarrow{\mathcal{M}}_O(\overrightarrow{F}_L)$ le moment en O des forces de LAPLACE et montrer que ce dernier est indépendant de la topographie des lignes de courant.

indication : Pour le calcul, on considérera les filets de courant, d'intensité di, qui appartiennent aux différents tubes de courant relian les points O et A.

2) Exprimer la *f.é.m* d'induction $e_{A\to O}$.

3) Montrer que $\Omega = \dot{\theta}$ s'écrit : $\Omega(t) = \dfrac{2E}{Ba^2}\left[1 - \exp\left(-\dfrac{B^2a^2}{2mR}t\right)\right]$

En déduire la vitesse limite Ω_∞ atteinte.

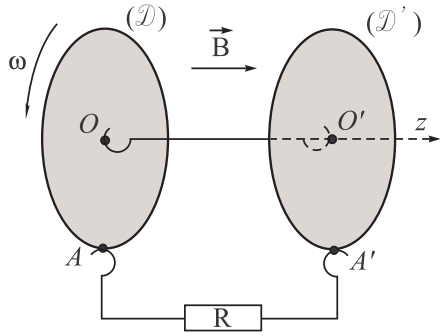
4) Lorsque cette vitesse limite est atteinte, on applique au disque un couple résistant $\overrightarrow{\Gamma} = -\Gamma\overrightarrow{e_z}$ ($\Gamma > 0$). Déterminer la valeur maximale Γ_{max} que l'on peut donner à ce couple pour que le système se comporte comme un moteur (*i.e.* $\Omega > 0$ lorsque le nouveau régime permanent est atteint).

EXS10.5 **Roues de BARLOW couplées** (C. Garing, p. 313)

Deux disques conducteurs identiques, homogènes $\mathcal{D}$, de rayon a, de masse m, de moment d'inertie $J = \frac{1}{2}ma^2$ par rapport à leur axe $\Delta = Oz$, peuvent tourner sans frottement autour de Δ, qui est aussi l'axe d'un champ magnétique uniforme et constant $\overrightarrow{B} = B\overrightarrow{e_z}$.

Le circuit est fermé sur lui-même sur l'axe conducteur OO' d'une part, à l'extérieur AA' d'autre part et les frottements sont négligés. La résistance totale du circuit est R.

À l'instant initial, le disque $\mathcal{D}$ tourne avec une vitesse angulaire $\omega(t=0) = \omega_0$, alors que $\mathcal{D}'$ est immobile: $\omega(t=0) = 0$.



1) Prévoir dans quel sens le disque $\mathcal{D}'$ va se mettre à tourner.

2) Écrire la loi des mailles.

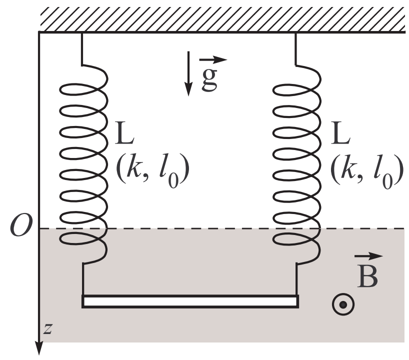
3) Écrire les deux équations différentielles qui relient d'une part $\omega(t)$ et $i(t)$ et d'autre part $\omega'(t)$ et $i(t)$.

4) Donner les solutions $i(t)$, $\omega(t)$ et $\omega(t)$.

5) Faire un bilan énergétique du système et le commenter.

EXS10.1 **Barre et ressorts dans un champ magnétique uniforme** (A. Colin, p. 38)

Une barre conductrice de masse m, de longueur a, de résistance négligeable, est suspendue à deux ressorts de raideur k, de longueur à vide l_0 et d'inductance propre (supposée constante) L.
On oriente la verticale Oz vers le bas et on choisit l'origine $z = 0$ à la position d'équilibre de la barre dans le référentiel terrestre.



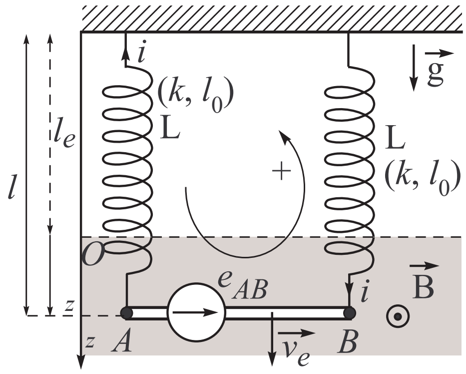
1) Déterminer l'équation du mouvement la barre **dans le cas où celle-ci demeure dans le demi espace z > 0** où règne un champ magnétique uniforme $\overrightarrow{B} = B\overrightarrow{e_z}$.
On posera $\omega^2 = \dfrac{2k}{m}$ et $\omega^2 = \dfrac{B^2a^2}{2mL} + \omega_0^2$.

2) À l'instant initial $t = 0$, la barre est tirée vers la bas de $z(0) = d$ par rapport à sa position d'équilibre et abandonnée sans vitesse initiale.

Déterminer $z(t)$ et $i(t)$. Réponse partielle : $i(t) = \dfrac{Bad}{2L}\left(\dfrac{\omega_0}{\omega}\right)^2(1 - \cos(\omega t))$.

3) Faire un bilan énergétique.

1) première chose à faire : annoter le schéma et l'orienter (en terme de courant) comme ça nous chante.



- $\boxed{e_{A\to B} = \int_A^B (\overrightarrow{v}_e \times \overrightarrow{B})\,.\,\overrightarrow{\mathrm{d}l}_{A\to B} = -aBv_e}$
- Loi des mailles : $\boxed{2L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = aB\dot{z}}$ ①
- Force de LAPLACE sur la barre : $\boxed{\overrightarrow{F}_L = \int_A^B i\overrightarrow{\mathrm{d}l} \times \overrightarrow{B} - iaB\overrightarrow{e_z}}$
- Le Théorème de la résultante dynamique pour la barre hors et équilibre ($\star$) et à l'équilibre ($\star\star$) conduit à : $\boxed{m\dfrac{\mathrm{d}v_e}{\mathrm{d}t} = -iaB - 2kz}$ ②

$\dfrac{\mathrm{d}②}{\mathrm{d}t} \xrightarrow{①} \boxed{\dfrac{\mathrm{d}^2v_e}{\mathrm{d}t^2} + \omega^2 v_e = 0}$ ③, avec $\boxed{\omega^2 = \dfrac{B^2a^2}{2mL} + \omega_0^2}$ et $\boxed{\omega_0^2 = \dfrac{2k}{m}}$.

2) $\boxed{v_e(t) = -\dfrac{\omega_0^2}{\omega} d\sin(\omega t)}$ $\rightarrow$ $\boxed{z(t) = d\left[1 - \dfrac{\omega_0^2}{\omega^2}(1 - \cos(\omega t))\right]}$

② $\longrightarrow$ $\boxed{i(t) = -\dfrac{Bad}{2L}\left(\dfrac{\omega_0}{\omega}\right)^2(1 - \cos(\omega t))}$ (la différence de signes avec l'énoncé vient de l'orientation arbitraire choisie pour $i(t)$ sur le schéma annoté).

3) En multipliant ① par $i(t)$ et ② par v_e, on obtient, par élimination de $i(t)$:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}mv_e^2 + Li^2 + kz^2\right) = 0 \Leftrightarrow \boxed{\frac{1}{2}mv_e^2 + 2.\frac{1}{2}kz^2 + 2.\frac{1}{2}Li^2 = \mathrm{Cte}}$$

ce qui traduit la conservation de l'énergie du système.

EXS10.2 **Amortissement par induction** (d'après A. Colin, p. 39)

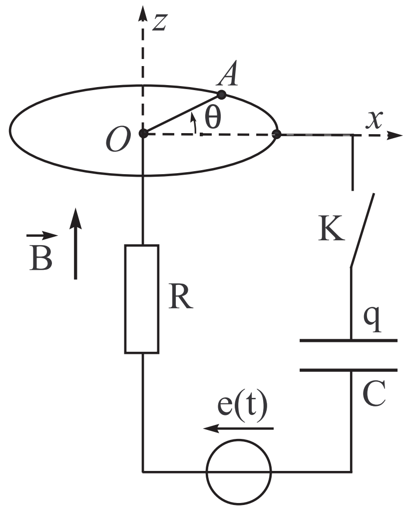
La barre $\{OA\}$, de masse m et de longueur a, peut tourner librement autour de l'axe vertical (Oz) par rapport auquel son moment d'inertie est $J = \dfrac{1}{3}ma^2$. Son extrémité A s'appuyant sans frottement sur le cercle de centre O et de rayon a.

La barre et le cercle sont conducteurs et sont fermés sur un générateur, qui délivre une tension sinusoïdale $e(t) = E_0\sin(\omega t)$, par l'intermédiaire d'un circuit comportant, en série, une résistance R et une capacité C. Les résistances de la barre et du cercle sont négligées devant R et on ne tiendra pas compte des phénomènes d'autoinduction.

$\overrightarrow{B} = B\overrightarrow{e_z}$ est un champ magnétique vertical uniforme et permanent.

On ferme l'interrupteur à l'instant $t = 0$, le condensateur n'étant pas chargé et la barre étant au repos.

On posera $I_0 = \dfrac{E_0}{R}$, $\tau = RC$, $\tau' = \dfrac{\tau}{1+\dfrac{3}{4m}B^2a^2C}$ et $Q_0 = \tau' I_0$.



1) Déterminer la force électromotrice d'induction $e_{A\to O}$.

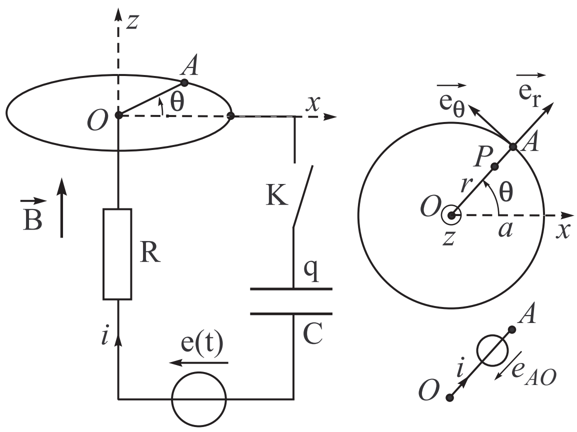
2) Établir l'équation différentielle vérifiée par q en fonction de $e(t)$, $\Omega = \dot{\theta}$, a, B, R et C.

3) Montrer que $\Omega = -\dfrac{3}{2}\dfrac{B}{m}q$.

4) Établir $q(t)$, charge du condensateur, et $\Omega(t)$, vitesse angulaire de rotation de la barre.

5) Faire un bilan énergétique du système et le commenter.

première chose à faire : annoter le schéma et l'orienter (en terme de courant) logiquement dans le sens de la *f.é.m* $e(t)$.



1) $$\boxed{e_{A\to O} = \int_A^O \left(\overrightarrow{v}_e(P)\times\overrightarrow{B}\right)\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}l}_{A\to O} = -\frac{1}{2}Ba^2\Omega}\ ①$$

2) La loi des mailles : $e(t) + Ri - e_{A\to O} - \dfrac{q}{C} = 0$ $(\star)$ conduit à :

$$\boxed{R\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} + \frac{q}{C} = E_0\sin(\omega t) + \frac{1}{2}Ba^2\Omega}\ ②$$

3) Théorème du moment cinétique selon l'axe $(J_\Delta\ddot{\theta} = \mathcal{M}_\Delta)$

$$\to\ \boxed{\dot{\Omega} = -\frac{3}{2}\frac{B}{m}\dot{q}}\ ③\ \Leftrightarrow\ \boxed{\Omega = -\frac{3}{2}\frac{B}{m}q}\ ④$$

4) • ④, ③ et ② conduisent à : $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} + \dfrac{}{\tau'}q = I_0\sin(\omega t)}$ ⑤.

• La solution de cette équation est de la forme :

$$q(t) = A\exp\left(-\frac{t}{\tau'}\right) + B_1\cos(\omega t) + B_2\sin(\omega t)\ ⑥$$

- En tenant compte des conditions initiales, on obtient :

$$\boxed{q(t) = \frac{Q_0}{1+(\omega\tau')^2}\left[\omega\tau' \exp\left(-\frac{t}{\tau'}\right) - \omega\tau' \cos(\omega t) + \sin(\omega t)\right]} \quad ⑦$$

- D'où, grâce à ④:

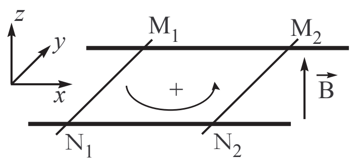
$$\boxed{\Omega(t) = -\frac{3}{2m}\frac{BQ_0}{1+(\omega\tau')^2}\left[\omega\tau' \exp\left(-\frac{t}{\tau'}\right) - \omega\tau' \cos(\omega t) + \sin(\omega t)\right]} \quad ⑧$$

5) $(\star) \xrightarrow{①} e = Ri - \frac{1}{2}Ba^2\Omega + \frac{q}{C}$.

En multipliant cette relation par $i(t)$ et en utilisant ③, on obtient un bilan de puissance qui se commente facilement : l'énergie fournie par le générateur est partiellement dissipée en effet JOULE, stockée dans le condensateur, le reste se retrouvant sous forme d'énergie cinétique de la barre :

$$\boxed{e.i = Ri^2 + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}\frac{q^2}{C}\right) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}J_\Delta\Omega^2\right)}$$

EXS10.3 **Système deux barre mobiles :** (A. Colin, p. 40)



Deux barres conductrices identiques $\mathcal{T}_1 = \{M_1N_1\}$ et $\mathcal{T}_2 = \{M_2N_2\}$ parallèles, de résistance $\frac{R}{2}$ et de masse m chacune, peuvent glisser sans frottement sur deux rails conducteurs, perpendiculaires aux barres et parallèles entre eux, distants de a et de résistance négligeable.

L'ensemble est plongé dans un champ magnétique uniforme et constant $\overrightarrow{B} = B\overrightarrow{e_z}$, orthogonal aux rails et aux barres. On néglige l'inductance propre du circuit.

→ Étudier le mouvement $\{v_2(t), x_2(t)\}$ de la barre $\mathcal{T}_2$ lorsqu'on communique, très rapidement (*percussion*), la vitesse $\overrightarrow{v}_1(0^+) = v_{01}\overrightarrow{e_x}$ à $\mathcal{T}_1$.

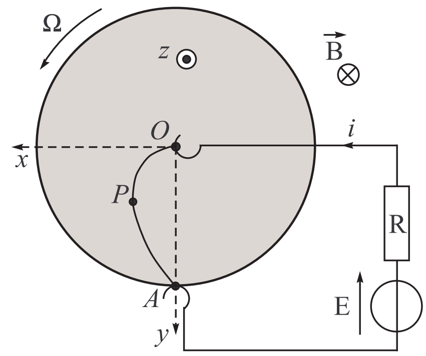
$$\boxed{v_2 = \dot{x}_2 = \frac{v_{01}}{2}\left[1 - \exp\left(-\frac{2B^2a^2}{mR}t\right)\right]}$$

$$\boxed{x_2 = \frac{v_{01}}{2}t + \frac{mRv_{01}}{4B^2a^2}\left[-1 + \exp\left(-\frac{2B^2a^2}{mR}t\right)\right] + x_{20}}$$

Rque : $v_1(\infty) - v_2(\infty) = 0$ et $v_1(\infty) = v_2(\infty) = \frac{v_{01}}{2}$: cette vitesse est atteinte lorsque le flux du champ magnétique à travers le circuit ne varie plus.

EXS10.4 **Disque de FARADAY** (A. Colin, p. 40 ; P. Krempf, p. 158-159)

Un disque métallique homogène $\mathcal{D}$, de rayon a, de masse m, de moment d'inertie $J = \frac{1}{2}ma^2$ par rapport à son axe $\Delta = Oz$, peut tourner sans frottement autour de Δ. Un générateur de tension idéal, de *f.é.m.* E constante, est relié au disque par deux contacts fixes glissant comme le montre la figure ci-contre. La résistance totale du circuit parcouru par un courant d'intensité i est R et son inductance propre est négligeable. L'ensemble est soumis à un champ magnétique uniforme $\overrightarrow{B} = -B\overrightarrow{e_z}$ et constant ($B = cte$).



1) Calculer $\overrightarrow{\mathcal{M}}_O(\overrightarrow{F}_L)$ le moment en O des forces de LAPLACE et montrer que ce dernier est indépendant de la topographie des lignes de courant.

indication : Pour le calcul, on considérera les filets de courant, d'intensité di, qui appartiennent aux différents tubes de courant relian les points O et A.

2) Exprimer la *f.é.m* d'induction $e_{A\rightarrow O}$.

3) Montrer que $\Omega = \dot{\theta}$ s'écrit : $\Omega(t) = \frac{2E}{Ba^2}\left[1 - \exp\left(-\frac{B^2a^2}{2mR}t\right)\right]$

En déduire la vitesse limite Ω_∞ atteinte.

4) Lorsque cette vitesse limite est atteinte, on applique au disque un couple résistant $\overrightarrow{\Gamma} = -\Gamma\overrightarrow{e_z}$ ($\Gamma > 0$). Déterminer la valeur maximale Γ_{max} que l'on peut donner à ce couple pour que le système se comporte comme un moteur (*i.e.* $\Omega > 0$ lorsque le nouveau régime permanent est atteint).

1) $\boxed{\overrightarrow{\mathcal{M}}_O(\overrightarrow{F}_L) = \int_{\mathrm{d}i} \mathrm{d}\overrightarrow{\mathcal{M}} = \frac{1}{2}iBa^2\,\overrightarrow{e_z}}$ ①

2) $e_{A\rightarrow O} = \int_A^O (\overrightarrow{v}_e(P) \times \overrightarrow{B}).\overrightarrow{\mathrm{d}l}_{A\rightarrow O}$ avec $v_e(P) = r\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta} = r\Omega\overrightarrow{e_\theta}$ à condition d'introduire la base polaire localement défini en un point P quelconque du tube élémentaire de courant considéré (avec $\overrightarrow{e_r} = \frac{\overrightarrow{OP}}{OP}$ et $\overrightarrow{e_r} \times \overrightarrow{e_\theta} = \overrightarrow{e_z}$).

On trouve : $\boxed{e_{A\rightarrow O} = -\frac{1}{2}Ba^2\Omega}$ ②

3) Appliquer la loi des mailles pour le circuit (relation ③) et le théorème du moment cinétique scalaire pour la roue (relation ④).

On en déduit : $\boxed{\Omega(t) = \frac{2E}{Ba^2}\left[1 - \exp\left(-\frac{B^2a^2}{2mR}t\right)\right]}$ et $\boxed{\Omega_\infty = \frac{2E}{Ba^2}}$.

4) L'écriture de la nouvelle équation mécanique qui tient compte du couple résistant conduit à :

$$\Omega(t) = \Omega_\infty - \frac{4\Gamma R}{B^2a^2}\left[1 - \exp\left(-\frac{B^2a^2}{2mR}t\right)\right]$$

D'où $\Omega'_\infty = \Omega_\infty - \frac{4\Gamma R}{B^2a^2}$ qui doit rester positif pour avoir un comportement moteur.

$\Omega'_\infty > 0 \Leftrightarrow \boxed{\Gamma < \Gamma_{max} = \frac{B^2a^4}{4R}\Omega_\infty = \frac{Ba^2}{2R}E}$