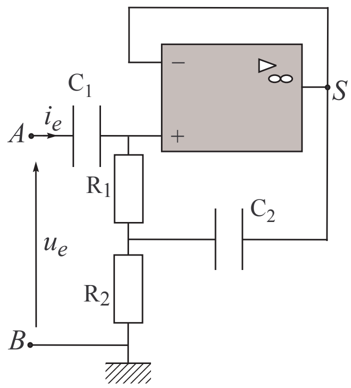
EXERCICES COLLES PC – S11 : Electrocinétique

EXS11.1 **Simulation électronique d'un composant passif**

(Ch. Garing, p. 18)

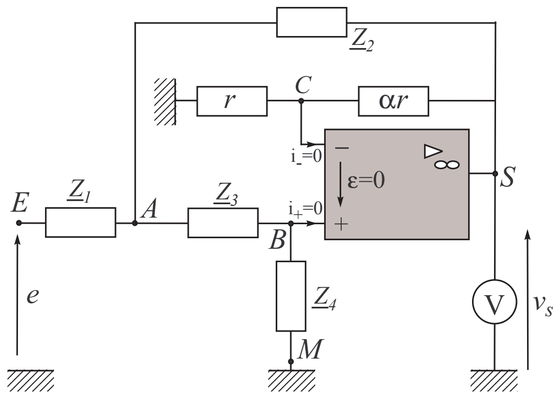
L'amplificateur opérationnel est parfait et fonctionne en régime linéaire. L'entrée AB est soumise à un régime sinusoïdal de pulsation ω.



1) Quelle est l'impédance équivalente $\underline{Z}_e = R_e + jX_e$ du dipôle AB (ou l'impédance d'entrée du montage entre A et B ? Quel dipôle ne figurant pas sur le montage a-t-on simulé ? Intérêt ?

2) En déduire le facteur de qualité du dipôle AB.

EXS11.2 **Filtre actif (Ecole de l'Air 2004)** Le montage amplificateur ci-contre comporte un amplificateur opérationnel idéal idéal en régime linéaire. La tension $e(t)$ est sinusoïdale. On utilisera la notation complexe.



1) Exprimer l'amplitude complexe du potentiel V_B en fonction de celle du potentiel en S.

2) Exprimer l'amplitude complexe du potentiel V_A en A en fonction de celles des potentiel en E et S, des admittances $\underline{Y}_i = \dfrac{1}{\underline{Z}_i}$ et de α.

3) En déduire la fonction de transfert $\underline{H} = \dfrac{\underline{V}_s}{\underline{E}}$ (où $\underline{E}$ est l'amplitude complexe de la force électromotrice $e(t)$ et $\underline{V}_S$ celle de la tension de sortie v_s) en fonction des admittances $\underline{Y}_i$ et de α.

4) On pose $\underline{Y}_1 = \underline{Y}_3 = \dfrac{1}{R}$ et $\underline{Y}_2 = \underline{Y}_4 = jC\omega$.

Montrer que $\underline{H}$ peut s'écrire sous la forme : $\underline{H}(j\omega) = \dfrac{A}{1 + 2jm\dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega^2}{\omega_0^2}}$

Donner les expressions de A, m et ω_0.

Réponse partielle : $\underline{H} = \dfrac{\underline{V}_S}{\underline{E}} = \dfrac{\underline{Y}_1}{\left((\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3)\dfrac{\underline{Y}_3 + \underline{Y}_4}{\underline{Y}_3} - \underline{Y}_3\right)\dfrac{1}{1+\alpha} - \underline{Y}_2}$

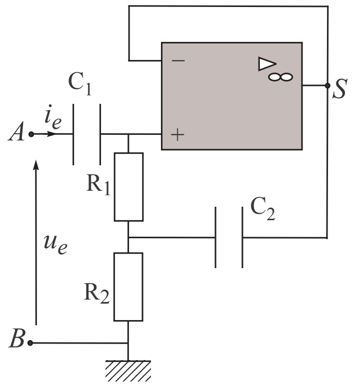
5) À quelle condition a-t-on amplification du signal ?

6) Tracer l'allure du diagramme de Bode (pour le gain) des trois courbes correspondant aux cas suivants : $m = 0{,}1$, $m = 0{,}707$ et $m = 1$.

EXS11.1 **Simulation électronique d'un composant passif**

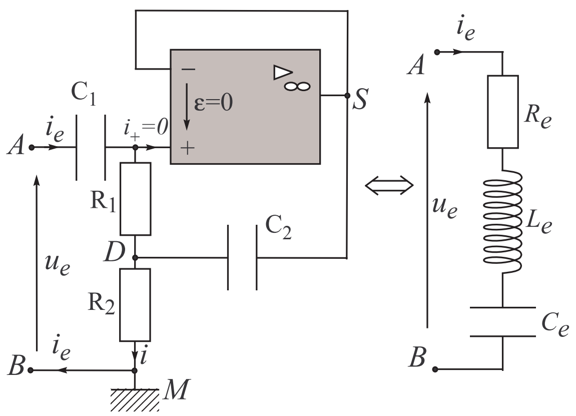
(Ch. Garing, p. 18)

L'amplificateur opérationnel est parfait et fonctionne en régime linéaire. L'entrée AB est soumise à un régime sinusoïdal de pulsation ω.



1) Quelle est l'impédance équivalente $\underline{Z}_e = R_e + jX_e$ du dipôle AB (ou l'impédance d'entrée du montage entre A et B ? Quel dipôle ne figurant pas sur le montage a-t-on simulé ? Intérêt ?

2) En déduire le facteur de qualité du dipôle AB.



1) • La loi des mailles donne : $\underline{u}_e = \left(\dfrac{1}{jC_1\omega} + R_1\right)\underline{i}_e + R_2\underline{i}$ ①

• La loi des nœuds en termes de potentiels en D donne :

$$\frac{\underline{V}_+ - \underline{V}_A}{R_1} + \frac{\underline{V}_S - \underline{V}_A}{\dfrac{1}{jC_2\omega}} - \underline{i} = 0$$

Comme $\underline{i}_e = \dfrac{\underline{V}_+ - \underline{V}_A}{R_1}$, et que Comme $V_+ = V_- = V_S$, on en déduit :

$\underline{i} = \underline{i}_e + jC_2\omega\, R_1\underline{i}_e$ ②

• ① $\xrightarrow{②}$ $\underline{u}_e = \left(\dfrac{1}{jC_1\omega} + R_1\right)\underline{i}_e + R_2(\underline{i}_e + jC_2\omega\, R_1\underline{i}_e)$

Ainsi : $\underline{u}_e = \left(R_1 + R_2 + jR_1R_2C_2\omega + \dfrac{1}{jC_1\omega}\right)\underline{i}_e$ ③

③ s'écrit sous la forme : $\underline{u}_e = \underline{Z}_e\,\underline{i}_e = (R_e + jX_e)\underline{i}_e$

avec $\boxed{R_e = R_1 + R_2}$, la résistance du dipôle équivalent

et $X_e = L_e\omega - \dfrac{1}{C_e\omega}$ la réactance correspondante, associée à un condensateur de capacité $\boxed{C_e = C_1}$ en série avec une bobine d'inductance $\boxed{L_e = R_1R_2C_2}$.

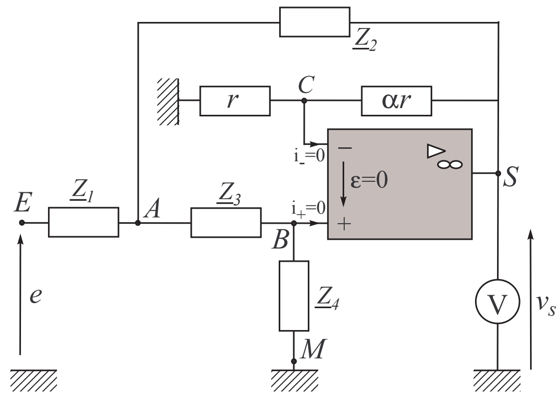
• On reconnaît l'impédance complexe d'un dipôle RLC série équivalent.

Le circuit actif (présence d'un AO) simule donc une «impédance électronique» de valeur réglable avec des composants «à pattes» tels que l'amplificateur opérationnel, les résistances et les condensateurs, qui sont tous petits, légers et peu chers. Alors qu'une «inductance électrocinétique» est une bobine de cuivre, lourde, volumineuse et onéreuse.

2) Par analogie avec un circuit RLC série de pulsation propre $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{L_eC_e}}$, on a :

$$Q = \frac{L_e\omega_0}{R_e} = \frac{1}{R_e}\sqrt{\frac{L_e}{C_e}}, \text{ soit ici : } \boxed{Q = \frac{\sqrt{R_1R_2}}{R_1 + R_2}\sqrt{\frac{C_2}{C_1}}}$$

EXS11.2 **Filtre actif (Ecole de l'Air 2004)** Le montage amplificateur ci-contre comporte un amplificateur opérationnel idéal idéal en régime linéaire. La tension $e(t)$ est sinusoïdale. On utilisera la notation complexe.



1) Exprimer l'amplitude complexe du potentiel V_B en fonction de celle du potentiel en S.

2) Exprimer l'amplitude complexe du potentiel V_A en A en fonction de celles des potentiel en E et S, des admittances $\underline{Y}_i = \dfrac{1}{\underline{Z}_i}$ et de α.

3) En déduire la fonction de transfert $\underline{H} = \dfrac{\underline{V}_S}{\underline{E}}$ (où $\underline{E}$ est l'amplitude complexe de la force électromotrice $e(t)$ et $\underline{V}_S$ celle de la tension de sortie v_s) en fonction des admittances $\underline{Y}_i$ et de α.

4) On pose $\underline{Y}_1 = \underline{Y}_3 = \dfrac{1}{R}$ et $\underline{Y}_2 = \underline{Y}_4 = jC\omega$.

Montrer que $\underline{H}$ peut s'écrire sous la forme : $\underline{H}(j\omega) = \dfrac{A}{1 + 2jm\dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega^2}{\omega_0^2}}$

Donner les expressions de A, m et ω_0.

5) À quelle condition a-t-on amplification du signal ?

6) Tracer l'allure du diagramme de BODE (pour le gain) des trois courbes correspondant aux cas suivants : $m = 0{,}1$, $m = 0{,}707$ et $m = 1$.

1) Pour un A.O. idéal en régime linéaire, $\underline{V}_B = \underline{V}_+ = \underline{V}_- = \underline{V}_C$. Alors, la Loi des nœuds en termes de potentiels en C donne :

$$\frac{\underline{V}_M - \underline{V}_C}{r} + \frac{\underline{V}_S - \underline{V}_C}{\alpha r} + 0 = 0$$

soit : $\boxed{\underline{V}_B = \underline{V}_C = \dfrac{\underline{V}_S}{1+\alpha}}$ ①.

2) La LNTP appliquée au point A s'écrit :

$$\frac{\underline{E} - \underline{V}_A}{\underline{Z}_1} + \frac{\underline{V}_S - \underline{V}_A}{\underline{Z}_2} + \frac{\underline{V}_B - \underline{V}_A}{\underline{Z}_3} = 0 \Leftrightarrow (\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3)\,\underline{V}_A = \underline{Y}_1\underline{E} + \underline{Y}_2\underline{V}_S + \underline{Y}_3\underline{V}_B$$

Soit, grâce à ①: $\boxed{\underline{V}_A = \dfrac{\underline{Y}_1\underline{E} + \left(\underline{Y}_2 + \dfrac{\underline{Y}_3}{1+\alpha}\right)\underline{V}_S}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3}}$ ②

3) Comme $i_+ = 0$, la LNTP appliquée en B s'écrit :

$$\frac{\underline{V}_A - \underline{V}_B}{\underline{Z}_3} + \frac{\underline{V}_M - \underline{V}_B}{\underline{Z}_4} + 0 = 0 \Leftrightarrow \underline{V}_A = \frac{\underline{Y}_3 + \underline{Y}_4}{\underline{Y}_3}\underline{V}_B \xrightarrow{①} \boxed{\underline{V}_A = \frac{\underline{Y}_3 + \underline{Y}_4}{\underline{Y}_3}\frac{\underline{V}_S}{1+\alpha}} \quad ③$$

$$② \xrightarrow{③} \frac{\underline{Y}_3 + \underline{Y}_4}{\underline{Y}_3}\frac{\underline{V}_S}{1+\alpha} = \frac{\underline{Y}_1\underline{E} + \left(\underline{Y}_2 + \dfrac{\underline{Y}_3}{1+\alpha}\right)\underline{V}_S}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3}$$

$$\hookrightarrow \boxed{\underline{H} = \frac{\underline{V}_S}{\underline{E}} = \frac{\underline{Y}_1}{\left((\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3)\dfrac{\underline{Y}_3 + \underline{Y}_4}{\underline{Y}_3} - \underline{Y}_3\right)\dfrac{1}{1+\alpha} - \underline{Y}_2}} \quad ④$$

4) En utilisant $\underline{Y}_1 = \underline{Y}_3 = \dfrac{1}{R}$ et $\underline{Y}_2 = \underline{Y}_4 = jC\omega$, la fonction de transfert devient :

$$\boxed{\underline{H} = \frac{\underline{V}_S}{\underline{E}} = \frac{1+\alpha}{1 + j(2-\alpha)RC\omega - R^2C^2\omega^2}}$$

qu'on peut écrire sous la forme : $\boxed{\underline{H}(j\omega) = \dfrac{A}{1 + 2jm\dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega^2}{\omega_0^2}}}$ ⑤

en posant $\boxed{A = 1 + \alpha}$, $\boxed{m = 1 - \dfrac{\alpha}{2}}$ et $\boxed{\omega_0 = \dfrac{1}{RC}}$.

5) La forme canonique de la fonction de transfert est celle d'un **filtre passe-bas**.

Mais un filtre passe-bas donc le facteur d'amortissement est paramétré par la valeur de α qui, sur un certain intervalle, permet au module $H(\omega)$ de la fonction de transfert de passer par un maximum.

En effet $H(\omega) = |\underline{H}(j\omega)| = \dfrac{A}{\sqrt{(1 - \dfrac{\omega^2}{\omega_0^2})^2 + 4m^2\dfrac{\omega^2}{\omega_0^2}}} = \dfrac{A}{\sqrt{f(X)}}$,

en posant $f(X) \equiv (1 - X)^2 + 4m^2 X = X^2 + 2(2m^2 - 1)X + 1$ et $X \equiv \dfrac{\omega^2}{\omega_0^2}$.

$H(\omega)$ passe par un maximum (H_{max}) lorsque $f(X)$ passe par un minimum, c'est-à-dire lorsque, pour $w = w_m$:

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}X}(X_m) = 2X_m + 2(2m^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow X_m = 1 - 2m^2 > 0$$

$$\hookrightarrow \boxed{\omega_m = \omega_0\sqrt{1 - 2m^2} < \omega_0 \text{ avec : } 0 < m < \frac{1}{\sqrt{2}}}$$

Dans ce cas ($m < \dfrac{1}{\sqrt{2}}$), le filtre se comporte comme un amplificateur de tension.

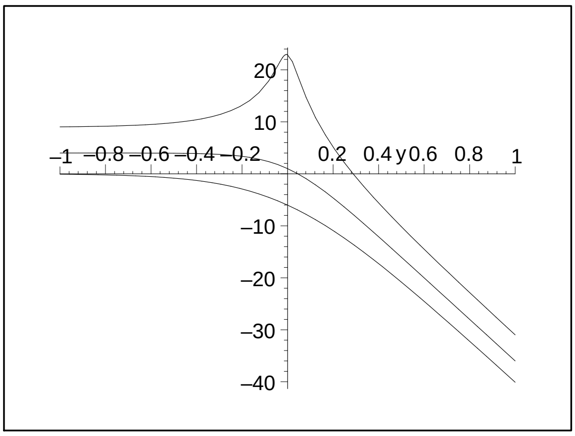
6) • La courbe de réponse en gain revient à tracer l'évolution du gain en décibels : $G_{dB} = 20 \log H$ en fonction de $\log x = \log \dfrac{\omega}{\omega_0}$:

$$\boxed{G_{dB} = 20 \log A - 10 \log((1 - x^2)^2 + 4m^2 x^2)}$$

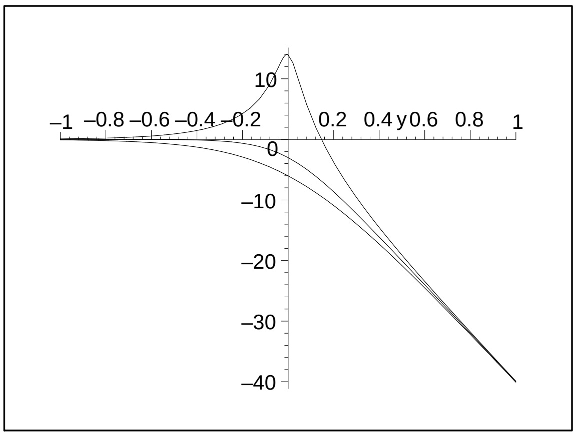
• Les asymptotes à basses fréquences et à hautes fréquences à cette courbes de réponses en gain ont les équations suivantes :

$\omega \ll \omega_0 \quad G_{dB} \longrightarrow \boxed{G_{dB}(ABF) = 20 \log A}$: droite horizontale passant par (0,20 $logA$).

$\omega \gg \omega_0 \quad G_{dB} \longrightarrow \boxed{G_{dB}(ABF) = 20 \log A - 40 \log x}$: droite de pente -40 dB/dec passant par (0,20 $logA$).



(a) G_{dB} pour $m = 0{,}1$, $m = 0{,}707$ et $m = 1$



(b) $G_{dB} - 20 \log A$ pour $m = 0{,}1$, $m = 0{,}707$ et $m = 1$