

# EXERCICES PC – S12: Électrocinétique

## EXS12.1 Filtre à structure de RAUCH (d'après Morellet/Grossart, p. 258)

On réalise un filtre à l'aide du montage suivant. L'amplificateur opérationnel est supposé idéal et en régime linéaire.

1) En déterminant la tension de sortie du filtre à basses et hautes fréquences, déterminer la nature de ce filtre.

2) En utilisant le théorème de MILLMAN en  $A$  et  $B$ , établir l'expression de la fonction de transfert  $\underline{H}$  du montage que l'on mettra sous la forme :

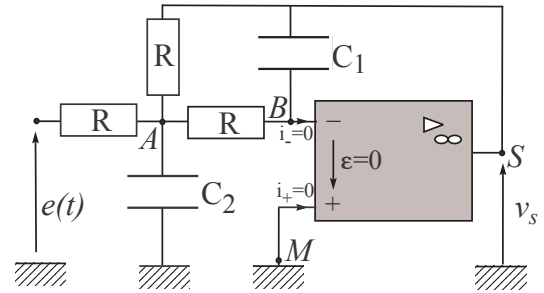
$$\underline{H} = \frac{H_0}{1 + 2m \frac{j\omega}{\omega_0} + \left(\frac{j\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

en déterminant  $H_0$  ainsi que les expressions de  $\omega_0$  et  $m$  en fonction de  $R$ ,  $C_1$  et  $C_2$ .

On souhaite obtenir une fréquence  $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = 5 \text{ Hz}$  et un facteur d'amortissement  $m = \frac{1}{\sqrt{2}}$ . On choisit  $R = 470 \Omega$ .

3) Calculer les valeurs des capacités  $C_1$  et  $C_2$ .

4) Pour les valeurs numériques précédentes, tracer le diagramme de BODE asymptotique (gain et phase) ainsi que l'allure des courbes réelles. On utilisera comme variable la pulsation réduite  $x = \frac{\omega}{\omega_0}$ .



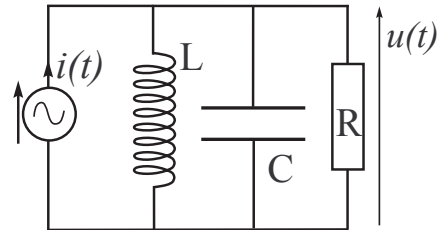
## EXS12.2 Facteur de qualité d'un circuit RLC parallèle (d'après Morellet/Grossart, p. 221, 235)

Le circuit représenté est alimenté par une source de courant sinusoïdal d'intensité  $i(t) = I_0 \cos(\omega t)$ .

1) Exprimer l'amplitude complexe  $\underline{U}$  de la tension  $u(t)$  aux bornes du circuit en fonction des données du problème.

2) Montrer que l'amplitude  $U_m$  de  $u(t)$  passe par un maximum pour une valeur  $\omega_0$  de la pulsation à déterminer.

3) Tracer la courbe donnant les variations de  $U_m$  en fonction de  $\omega$ . Préciser la largeur  $\Delta\omega = \omega_1 - \omega_2$  de la courbe de réponse, où  $\omega_1$  et  $\omega_2$  sont les pulsations telles que  $U_m = \frac{U_m(max)}{\sqrt{2}}$ .



4) Exprimer en fonction de  $R$ ,  $L$  et  $C$  le facteur de qualité  $Q$  du circuit, défini par  $\frac{1}{Q} = \frac{\Delta\omega}{\omega_0}$ .

5) Exprimer la puissance électrique moyenne  $\mathcal{P}$  fournie par la source de courant.

6) Montrer que la puissance  $\mathcal{P}$  passe par un maximum pour une pulsation à déterminer.

7) On pose  $x = \frac{\omega}{\omega_0}$ . Exprimer la puissance  $\mathcal{P}$  sous la forme :  $\mathcal{P} = \frac{\mathcal{P}_{max}}{1 + A(x - \frac{1}{x})^2}$

en donnant les expressions de  $\mathcal{P}_{max}$  et de  $A$ .

8) Déterminer la largeur relative  $\frac{\Delta\omega}{\omega_0}$  de l'intervalle de pulsations  $\Delta\omega$  telles que  $\mathcal{P} > \frac{\mathcal{P}_{max}}{2}$ .

**EXS12.1** **Filtre à structure de RAUCH** (d'après Morellet/Grossart, p. 258)

On réalise un filtre à l'aide du montage suivant. L'amplificateur opérationnel est supposé idéal et en régime linéaire.

1) En déterminant la tension de sortie du filtre à basses et hautes fréquences, déterminer la nature de ce filtre.

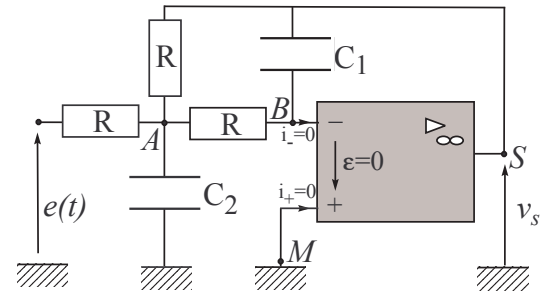
2) En utilisant le théorème de MILLMAN en A et B, établir l'expression de la fonction de transfert  $\underline{H}$  du montage que l'on mettra sous la forme :  $\underline{H} = \frac{H_0}{1 + 2m \frac{j\omega}{\omega_0} + \left(\frac{j\omega}{\omega_0}\right)^2}$

en déterminant  $H_0$  ainsi que les expressions de  $\omega_0$  et  $m$  en fonction de  $R$ ,  $C_1$  et  $C_2$ .

On souhaite obtenir une fréquence  $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = 5 \text{ Hz}$  et un facteur d'amortissement  $m = \frac{1}{\sqrt{2}}$ . On choisit  $R = 470 \Omega$ .

3) Calculer les valeurs des capacités  $C_1$  et  $C_2$ .

4) Pour les valeurs numériques précédentes, tracer le diagramme de BODE asymptotique (gain et phase) ainsi que l'allure des courbes réelles. On utilisera comme variable la pulsation réduite  $x = \frac{\omega}{\omega_0}$ .



1) • Puisqu'un condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert à basses fréquences ( $\frac{1}{C\omega} \rightarrow \infty$  si  $\omega \rightarrow 0$ ), alors  $V_A = V_B$  car parcourue par  $i_- = 0$ .

Comme B est une masse virtuelle (pour un AO idéal :  $V_B = V_{E-} = V_{E+} = V_M = 0$ ), on en déduit que  $V_A = 0$ .

La loi des nœuds en termes de potentiels en A donne :  $\frac{E - V_A}{R} + \frac{V_S - V_A}{R} + \frac{V_B - V_A}{R} + 0 = 0$ , d'où :  $V_S = -E \Leftrightarrow v_s(t) = -e(t) \Leftrightarrow \underline{H}(\omega = 0) = -1$ .

• Puisqu'un condensateur se comporte comme un interrupteur fermé à hautes fréquences ( $\frac{1}{C\omega} \rightarrow 0$  si  $\omega \rightarrow \infty$ ), on a  $v_s(t) = u_{BM} = 0 \Leftrightarrow \underline{H}(\omega \rightarrow \infty) = 0$ .

• C1 : Le filtre se comporte comme un **filtre passe-bas**.

2) • Le théorème de MILLMAN appliqué au nœud A donne :

$$\underline{V}_A = \frac{\frac{E}{R} + \frac{V_B}{R} + \frac{V_S}{R} + jC_2\omega V_M}{\frac{3}{R} + jC_2\omega} \Rightarrow \underline{V}_A = \frac{E + V_B + V_S}{3 + jRC_2\omega} \quad \textcircled{1}$$

• Le théorème de MILLMAN appliqué au nœud B donne :

$$\underline{V}_B = \frac{\frac{V_A}{R} + jC_1\omega V_S + 0}{\frac{1}{R} + jC_1\omega} \Rightarrow \underline{V}_B = \frac{V_A + jRC_1\omega V_S}{1 + jRC_1\omega} \quad \textcircled{2}$$

• Comme B est une masse virtuelle (cf 1) ), on a  $\underline{V}_B = 0$  et ① et ② conduisent à la relation :

$$\frac{E + V_S}{3 + jRC_2\omega} + jRC_1\omega V_S = 0 \Leftrightarrow E + V_S + (3 + jRC_1\omega)jRC_1\omega V_S = 0$$

$$\Leftrightarrow \underline{H} = \frac{V_S}{E} = \frac{-1}{1 + 3RC_1(j\omega) + R^2C_1C_2(j\omega)^2} \quad (*)$$

• Par comparaison avec la forme canonique d'un filtre passe-bas d'ordre 2, on obtient :

$$\underline{H} = \frac{H_0}{1 + 2m \frac{j\omega}{\omega_0} + \left(\frac{j\omega}{\omega_0}\right)^2} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} H_0 = -1 \\ \omega_0 = \frac{1}{R\sqrt{C_1C_2}} \end{array} \right. \quad \left[ m = \frac{3}{2}RC_1\omega_0 = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{C_1}{C_2}} \right]$$

3) • De ce qui précède on tire deux relations liant  $C_1$  et  $C_2$  :

$$\omega_0 = \frac{1}{R\sqrt{C_1C_2}} \Leftrightarrow C_1C_2 = \frac{1}{R^2\omega_0^2} \quad \textcircled{3} \quad \text{et} \quad m = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{C_1}{C_2}} \Leftrightarrow \frac{C_1}{C_2} = \frac{4}{9}m^2 \quad \textcircled{4}$$

• On en tire :  $C_1 = \frac{m}{3R\pi f_0} = 32 \mu F$  et  $C_2 = \frac{9}{4m^2}C_1 = \frac{3}{4mR\pi f_0} = 144 \mu F$

4) • La fonction de transfert peut s'écrire :

$$\underline{H} = \frac{H_0}{1 - x^2 + j2mx} = \frac{j}{2mx + j(x^2 - 1)} = He^{j\varphi} \text{ en posant } x = \frac{\omega}{\omega_0}.$$

• On en déduit :  $H = \frac{1}{\sqrt{(x^2 - 1)^2 + 4m^2x^2}}$  et  $\varphi = \frac{\pi}{2} - \arctan \left[ \frac{1}{2} \left( x - \frac{1}{x} \right) \right]$

car  $\varphi = \arg \underline{H} = \arg j - \arg [2mx + j(x^2 - 1)] = \frac{\pi}{2} - \arctan \left( \frac{x^2 - 1}{2mx} \right)$

• La gain en décibels est :  $G_{dB}(\omega) = 20 \log H = -10 \log [(x^2 - 1)^2 + 4m^2x^2]$

• Asymptote basses fréquences : pour  $\omega \ll \omega_0 \Leftrightarrow x \ll 1$ , on a :

$$G_{dB} \rightarrow G_{dB}(ABF) = 0 \text{ dB} \text{ et } \varphi \rightarrow \varphi(0) = \pi$$

On en déduit que pour  $x \ll 1$ , la courbe de réponse en gain en décibels présente une asymptote horizontale de valeur 0 dB et que la courbe de réponse en phase présente une asymptote horizontale de valeur 180°.

• Asymptote hautes fréquences : pour  $\omega \gg \omega_0 \Leftrightarrow x \gg 1$ , on a :

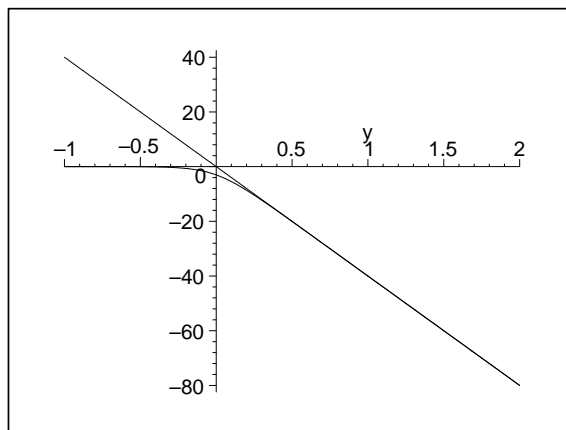
$$G_{dB} \rightarrow G_{dB}(AHF) = -40 \log x \text{ dB} \text{ et } \varphi \rightarrow \varphi(\infty) = 0$$

On en déduit que pour  $x \gg 1$ , la courbe de réponse en gain en décibels présente une asymptote de pente -40 dB/dc passant par l'origine et que la courbe de réponse en phase présente une asymptote horizontale de valeur 0°.

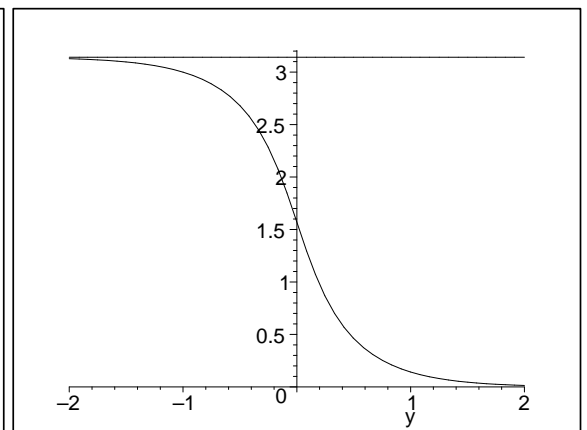
• Pour  $\omega = \omega_0 \Leftrightarrow x = 1$ , on a  $\underline{H} = \frac{-jH_0}{2m} = j\frac{1}{\sqrt{2}}$ .

D'où  $G_{dB}(\omega_0) = 20 \log \frac{1}{\sqrt{2}} = -3,0 \text{ dB}$  et  $\varphi = 90^\circ$ .

**Rque :** le fait que  $G_{dB}(\omega_0) - G_{dB}(max) = -3,0 \text{ dB}$  indique que  $\omega_0$  représente la pulsation de coupure du filtre.



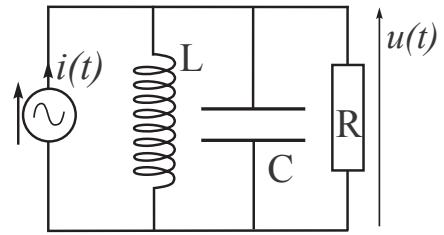
(a)  $G_{dB}(\log(x))$



(b)  $\varphi(\log(x))$

**EXS12.2** Facteur de qualité d'un circuit *RLC* parallèle (d'après Morellet/Grossart, p. 221, 235)

Le circuit représenté est alimenté par une source de courant sinusoïdal d'intensité  $i(t) = I_0 \cos(\omega t)$ .



1) Exprimer l'amplitude complexe  $\underline{U}$  de la tension  $u(t)$  aux bornes du circuit en fonction des données du problème.

2) Montrer que l'amplitude  $U_m$  de  $u(t)$  passe par un maximum pour une valeur  $\omega_0$  de la pulsation à déterminer.

3) Tracer la courbe donnant les variations de  $U_m$  en fonction de  $\omega$ . Préciser la largeur  $\Delta\omega = \omega_1 - \omega_2$  de la courbe de réponse, où  $\omega_1$  et  $\omega_2$  sont les pulsations telles que  $U_m = \frac{U_m(max)}{\sqrt{2}}$ .

4) Exprimer en fonction de  $R$ ,  $L$  et  $C$  le facteur de qualité  $Q$  du circuit, défini par  $\frac{1}{Q} = \frac{\Delta\omega}{\omega_0}$ .

5) Exprimer la puissance électrique moyenne  $\mathcal{P}$  fournie par la source de courant.

6) Montrer que la puissance  $\mathcal{P}$  passe par un maximum pour une pulsation à déterminer.

7) On pose  $x = \frac{\omega}{\omega_0}$ . Exprimer la puissance  $\mathcal{P}$  sous la forme :  $\mathcal{P} = \frac{\mathcal{P}_{max}}{1 + A(x - \frac{1}{x})^2}$

en donnant les expressions de  $\mathcal{P}_{max}$  et de  $A$ .

8) Déterminer la largeur relative  $\frac{\Delta\omega}{\omega_0}$  de l'intervalle de pulsations  $\Delta\omega$  telles que  $\mathcal{P} > \frac{\mathcal{P}_{max}}{2}$ .

1) En notation complexe, on a  $\underline{I} = \underline{Y}\underline{U}$  en introduisant l'impédance du dipôle *RLC* parallèle :  $\underline{Y} = \underline{Y}_R + \underline{Y}_C + \underline{Y}_L = \frac{1}{R} + j\left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right)$ .

$$\text{D'où : } \underline{U} = \frac{\underline{I}}{\frac{1}{R} + j\left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right)}$$

2)  $U_m = |\underline{U}| = \frac{I_0}{\sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right)^2}}$ , fonction qui est maximale lorsque  $\left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right)^2$

est minimal, soit pour  $\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ .

3) • On constate que  $\lim_{\omega \rightarrow 0} U_m(\omega) = \lim_{\omega \rightarrow \infty} U_m(\omega) = 0$ .

• Pour  $\omega = \omega_0$ ,  $U_m = U_m(max) = RI$ .

• Les pulsations de coupures  $\omega_1$  et  $\omega_2$  vérifient :

$$\frac{I}{\sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right)^2}} = \frac{RI}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \frac{1}{R^2} + \left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right)^2 = \frac{2}{R^2} \Leftrightarrow C\omega - \frac{1}{L\omega} = \pm \frac{1}{R}$$

Les pulsations  $\omega_1$  et  $\omega_2$  sont donc les racines positives des équations du second degré :

$$LC\omega^2 \pm \frac{L}{R}\omega - 1 = 0 \text{ ①/②}$$

Le discriminant de ①/② est  $\Delta = \frac{L^2}{R^2} + 4LC = \frac{L^2}{R^2} \left(1 + 4R^2 \frac{C}{L}\right)$

$$\Leftrightarrow \omega_2 = \frac{\frac{L}{R} + \sqrt{\Delta}}{2LC} = \frac{1}{2RC} \left(1 + \sqrt{1 + 4R^2 \frac{C}{L}}\right)$$

$$\Leftrightarrow \omega_1 = \frac{-\frac{L}{R} + \sqrt{\Delta}}{2LC} = \frac{1}{2RC} \left(-1 + \sqrt{1 + 4R^2 \frac{C}{L}}\right)$$

4) La largeur de la bande passante est donc :  $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = \frac{1}{RC}$ ,

d'où un facteur de qualité  $Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} = RC\omega_0 = R\sqrt{\frac{C}{L}}$

5) La puissance électrique moyenne  $\mathcal{P}$  consommée par une admittance  $\underline{Y}$  s'écrit (en introduisant  $\varphi$  le déphasage de  $u(t)$  par rapport à  $i(t)$ ) :  $\mathcal{P} = \frac{U_m I_0}{2} \cos \varphi = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\underline{Y}) U_m^2$ .

• D'après la question 1) et l'expression de  $\underline{Y}$  (qui donne  $\operatorname{Re}(\underline{Y}) = \frac{1}{R}$ ),

comme  $U_m = \frac{I_0}{Y}$  on obtient :

$$\mathcal{P} = \frac{1}{2R} \frac{I_0^2}{\frac{1}{R^2} + \left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right)^2} \Leftrightarrow \mathcal{P} = \frac{\frac{1}{2} R I_0^2}{1 + R^2 \left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right)^2} = \frac{\mathcal{P}_{max}}{1 + R^2 \left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right)^2}$$

en posant  $\mathcal{P}_{max} = \frac{1}{2} R I_0^2 = R I_{eff}^2$ .

6) •  $\mathcal{P} = \mathcal{P}_{max} \Leftrightarrow C\omega - \frac{1}{L\omega} = 0 \Leftrightarrow \omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

7) Comme  $\omega = x\omega_0 = x\sqrt{\frac{1}{LC}}$  :  $\mathcal{P} = \frac{\mathcal{P}_{max}}{1 + R^2 \frac{C}{L} \left(x - \frac{1}{x}\right)^2} \Rightarrow \mathcal{P} = \frac{\mathcal{P}_{max}}{1 + Q^2 \left(x - \frac{1}{x}\right)^2}$

8) d'après 7) ,  $\mathcal{P} = \frac{\mathcal{P}_{max}}{2} \Leftrightarrow 1 + Q^2 \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = 2 \Leftrightarrow x^2 \mp \frac{x}{Q} - 1 = 0$

On retrouve la bande passante calculée en 4) , d'où :  $\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_0} = \frac{1}{Q}$ .