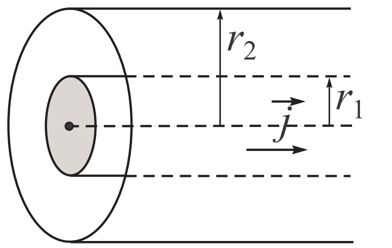
EXERCICES PC – S25 : Diffusion Thermique

EXS25.1 **Température dans un cable électrique** (d'après HP1996/Thermo, MP-PT, p. 67)



Un conducteur électrique de section circulaire de rayon r_1, de conductivité électrique σ et de conductivité thermique K_1, est entouré d'une gaine isolante de rayon r_2 et de conductivité thermique K_2.
Ce conducteur est parcouru par un courant électrique d'intensité I, dont la densité est uniforme. On se place en régime permanent et on néglige tout effet de bord.
On suppose que le contact thermique entre le conducteur et la gaine isolante est parfait.
En revanche, on admettra qu'entre la gaine isolante et l'air ambiant dont la température est égale à T_0, il s'établit des échanges thermiques superficiels définis par la loi de NEWTON : une section de longueur L de la surface latérale de la gaine – dont la température vaut $T(r_2)$ et dont l'aire vaut $s = 2\pi r_2.L$ – échange avec l'air un flux thermique : $\Phi = h.(T(r_2) - T_0).s$ où h est une constante positive.

1) Quelle est la symétrie du problème ? Qu'en déduit-on de l'expression de la densité volumique de courant thermique $\overrightarrow{j_{th}}$ dans le conducteur ? dans la gaine ?

2) Dans la gaine, comment se traduit le fait qu'on est en régime permanent en terme de flux thermique à travers un cylindre de longueur L et de rayon r ?

3) Déterminer la température T à une distance r dans la gaine en fonction, entre autre, de $T(r_2)$, de r_2 et de K_2.

4) Dans le conducteur, comment se traduit le fait qu'on est en régime permanent en terme de bilan thermique ? En déduire l'expression du vecteur densité de courant thermique en fonction des constantes I, r_1 et σ.

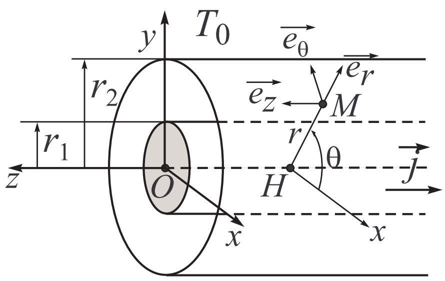
5) Déterminer la température T à une distance r dans le conducteur en fonction de $T(r_1)$, de r_1, de K_1 et de σ.

6) Donner les deux relations de continuité. En déduire l'expression de $T(r_2)$ en fonction des données de l'énoncé.

7) Calculer $T(0)$, $T(r_1)$ et $T(r_2)$.

Données : $\sigma = 5.10^7\ \Omega^{-1}.m^{-1}$; $K_1 = 400\ W.m^{-1}.K^{-1}$; $K_2 = 0{,}4\ W.m^{-1}.K^{-1}$;
$r_1 = 0{,}5\ cm$; $r_2 = 2\ cm$; $I = 100\ A$; $T_0 = 300\ K$ et $h = 20\ W.m^{-2}.K^{-1}$.

Corrigé :



1) • Le problème est à symétrie cylindrique. On travaille dans la base cylindrique $(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta}, \overrightarrow{e_z})$ en choisissant $\overrightarrow{e_z}$ tel que le vecteur densité volumique de courant s'écrit :
$\vec{j} = -\dfrac{I}{\pi r_1^2}\overrightarrow{e_z}$.

• Alors, dans le câble, la température T est de la forme : $T = T(r)$ et le vecteur densité de courant thermique s'écrit : $\overrightarrow{j_{th}} = j_{th}(r)\overrightarrow{e_r}$.

Plus particulièrement, le vecteur $\overrightarrow{j_{th}}$ s'écrit :

$$\text{dans le conducteur : } \overrightarrow{j_{th}} = -K_1\,\overrightarrow{\text{grad}}T(r) = -K_1\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r}\overrightarrow{e_r} \quad ①$$

$$\text{dans la gaine : } \overrightarrow{j_{th}} = -K_2\,\overrightarrow{\text{grad}}T(r) = -K_2\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r}\overrightarrow{e_r} \quad ②$$

2) En régime permanent, la température T ne varie pas en fonction du temps et il n'y a pas accumulation d'énergie thermique dans un volume fixe de l'espace de la gaine.

Soit le volume compris entre deux cylindres concentriques compris dans le câble, de longueurs L et de rayons r et $r+\mathrm{d}r$: l'énergie thermique de ce volume étant constante, on en déduit que la puissance thermique qu'il reçoit au niveau de sa surface fermée Σ est globalement nulle :

$$\frac{\delta Q}{\mathrm{d}t} = \Phi = \oint_{\Sigma} \overrightarrow{j_{th}}\,.\,\overrightarrow{\mathrm{d}S_{int}} = \int j_{th}(r)\overrightarrow{e_r}\,.\,\overrightarrow{\mathrm{d}S_{int}} + \int j_{th}(r+\mathrm{d}r)\overrightarrow{e_r}\,.\,\overrightarrow{\mathrm{d}S_{int}} \equiv 0$$

Soit : $\Phi = 2\pi r.L.j_{th}(r) - 2\pi(r+\mathrm{d}r).L.j_{th}(r+\mathrm{d}r) = \Phi(r) - \Phi(r+\mathrm{d}r) = 0$

• On en déduit que, dans la gaine, le flux thermique du vecteur densité volumique de courant thermique $\overrightarrow{j_{th}}$ est indépendant de r : $\forall r \in]r_1,r_2]$ $\boxed{2\pi r.L.j_{th}(r) = Cte \equiv \Phi_0}$ ③

3) • Dans la gaine, les relations ② et ③ conduisent à : $j_{th}(r) = \dfrac{\Phi_0}{2\pi r.L} = -K_2\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r}$

Soit : $\mathrm{d}T = -\dfrac{\Phi_0}{2\pi L.K_2}\dfrac{\mathrm{d}r}{r} \Leftrightarrow \forall r \in]r_1,r_2]$ $\boxed{T(r) = -\dfrac{\Phi_0}{2\pi L.K_2}\ln\left(\dfrac{r}{r_2}\right) + T(r_2)}$ ④

4) Soit un cylindre d'axe Oz, de section πr^2 (avec $r \leq r_1$) et de longueur L.

En régime stationnaire, le transfert thermique globalement reçu par le volume $\mathcal{V}$ de ce cylindre pendant une durée $\mathrm{d}t$ est nul : $\dfrac{\delta Q}{\mathrm{d}t} = \mathcal{P}_J + \mathcal{P}_{th} \equiv 0$

Il faut donc que la puissance thermique reçu par effet JOULE dans le volume $\mathcal{V}$ soit égal à la puissance thermique fournie à l'extérieur par conduction thermique au niveau de sa surface latérale $\mathcal{S}_l = 2\pi r.L$: $\mathcal{P}_J = -\mathcal{P}_{th} \Leftrightarrow R_{\mathcal{V}}.I_{\mathcal{V}}^2 = \int_{\mathcal{S}_l} \overrightarrow{j_{th}}\,.\,\overrightarrow{\mathrm{d}S_{ext}} = j_{th}(r).2\pi r.L$

Avec, pour un conducteur ohmique de conductivité σ, de section πr^2 et de longueur L : $R_{\mathcal{V}} = \dfrac{L}{\sigma\pi r^2}$. Et l'intensité qui traverse une telle section est : $I_{\mathcal{V}} = j.\pi r^2 = \dfrac{r^2}{r_1^2}.I$

On en déduit : $\forall r \in [0,r_1]$ $\boxed{j_{th}(r) = \dfrac{1}{\sigma}\left(\dfrac{I}{\pi r_1^2}\right)^2\dfrac{r}{2}}$ ⑤.

5) • Dans le conducteur, les relations ① et ⑤ conduisent à :

$$j_{th}(r) = \frac{1}{\sigma}\left(\frac{I}{\pi r_1^2}\right)^2\frac{r}{2} = -K_1\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r} \Leftrightarrow \mathrm{d}T = -\frac{1}{K_1\sigma}\left(\frac{I}{\pi r_1^2}\right)^2\frac{r}{2}\mathrm{d}r$$

Soit : $\forall r \in [0,r_1]$ $\boxed{T(r) = -\dfrac{1}{K_1\sigma}\left(\dfrac{I}{\pi r_1^2}\right)^2\dfrac{r^2-r_1^2}{4} + T(r_1)}$ ⑥

6) • Il y a continuité du flux thermique lorsqu'on change de milieu. Et donc à travers un cylindre de longueur L et de rayon r_2 :

$$\Phi(r_2^+) = \Phi(r_2^-) \Leftrightarrow h.(T(r_2) - T_0).2\pi r_2.L = j_{th}(r_2^-).2\pi r_2.L \equiv \Phi_0$$

Soit : $\Phi_0 = h.(T(r_2) - T_0).2\pi r_2.L \Leftrightarrow T(r_2) = \dfrac{\Phi_0}{2\pi r_2.L.h} + T_0$ ⑦

• De même : $\Phi(r_1^+) = \Phi(r_1^-) \Leftrightarrow \Phi_0 = j_{th}(r_1^-).2\pi r_1.L = \dfrac{1}{\sigma}\left(\dfrac{I}{\pi r_1^2}\right)^2\dfrac{r_1}{2}.2\pi r_1.L$

Soit : $\boxed{\Phi_0 = \dfrac{1}{\sigma\pi}\dfrac{LI^2}{r_1^2}}$ ⑧ et de ⑦ et ⑧, on obtient : $\boxed{T(r_2) = \dfrac{I^2}{\sigma\pi r_1^2}\dfrac{1}{2\pi r_2 h} + T_0}$ ⑨

7) • D'après ce qui précède $\boxed{T_2 = 301\ K}$.

• La continuité des températures en $r = r_1$ et les relations ④ et ⑧ donnent :

$\boxed{T(r_1) = -\dfrac{1}{\sigma\pi}\dfrac{I^2}{r_1^2}\dfrac{1}{2\pi K_2}\ln\left(\dfrac{r_1}{r_2}\right) + T(r_2) = 302{,}4\ K}$.

• Enfin, la relation ⑥ donne : $\boxed{T(0) = \dfrac{1}{K_1\sigma}\left(\dfrac{I}{\pi r_1^2}\right)^2\dfrac{r_1^2}{4} + T(r_1) \approx T(r_1) = 302{,}4\ K}$.