

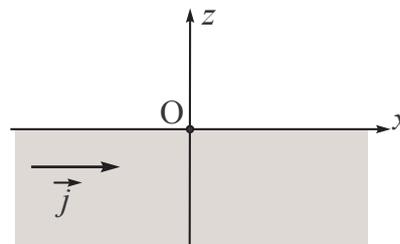
# EXERCICES COLLES PC – S9

## Equations locales

### EXS9.1 Conducteur dans l'ARQS

Un conducteur linéaire, de conductivité  $\gamma$ , occupe le demi-espace défini par  $z < 0$ . On étudie dans ce matériau les conséquences d'un courant sinusoïdal de densité de courant  $\vec{j} = J(z) \cos(\omega t) \vec{e}_x$ . On pourra utiliser la notation complexe (on note  $\underline{E}$  le complexe associé au champ réel  $\vec{E}$ ).

- 1) Donner l'expression de  $\vec{E}$
- 2) On se place dans l'ARQS. À partir de symétrie et des invariances, montrer que :
  - a)  $\vec{B}$  est porté par  $\vec{e}_x$
  - b)  $\vec{B}$  ne dépend que de  $z$  et de  $t$ .
- 3) Rappeler les équations de MAXWELL dans l'ARQS.
- 4) Déterminer  $\vec{B}(z, t)$ .
- 5) Établir l'équation différentielle vérifiée par  $\underline{J}(z)$  ainsi que celle vérifiée par  $\underline{E}(z)$  et  $\underline{B}(z)$ .
- 6) Déterminer les solutions de l'équation caractéristique de l'équation différentielle précédente et mettre en évidence une longueur caractéristique de la variation spatiale des grandeurs  $\vec{j}$ ,  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$ .
- 7) Déterminer la loi  $\vec{j}(z, t)$  et interpréter le résultat en particulier en étudiant la variation de  $J$  avec la distance au plan  $Oxy$  à un instant donné.



### EXS9.2 Théorème de POYNTING

1) En faisant un bilan d'énergie électromagnétique pour un volume  $\mathcal{V}$  quelconque limité par une surface fermée  $\mathcal{S}$  dans lequel règne un champ électromagnétique, établir l'équation locale de conservation de l'énergie :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \vec{j} \cdot \vec{E} + \text{div } \vec{\pi} = 0$$

Interprétation de chacun des termes.

2) En utilisant les équations locales de MAXWELL, en déduire l'équation locale de POYNTING (ou théorème de POYNTING).

3) Soit un fil cylindrique conducteur de conductivité  $\gamma$ , de rayon  $R$ , d'axe  $Oz$  parcouru par l'intensité constante  $I$ , le courant étant réparti de manière uniforme.

→ Montrer qu'en un point de la périphérie, le vecteur de POYNTING s'écrit, dans la base cylindrique  $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$  sous la forme :  $\vec{\pi} = -\frac{I^2}{2\gamma\pi^2 R^3} \vec{e}_r$ .

4) Calculer la puissance électromagnétique rayonnée à travers la surface d'une portion de hauteur  $h$  de ce cylindre conducteur.

5) En déduire la résistance électrique d'une telle portion de conducteur.

### EXS9.3 Conducteur en régime stationnaire et Charge surfacique

1) On considère un conducteur dont le champ électrique satisfait en régime stationnaire à l'équation différentielle :  $\Delta \vec{E} - \frac{\vec{E}}{\lambda_D^2} = \vec{0}$ , où  $\lambda_D$  est une grandeur caractéristique du matériau.

Quelle est l'unité de cette grandeur ?

La surface du conducteur est supposée plane et l'axe ( $Ox$ ) est choisi selon sa normale.

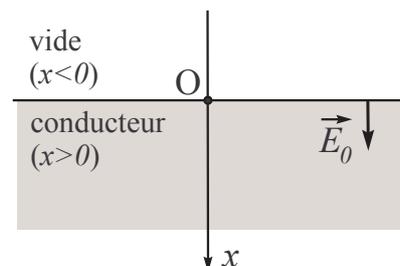
→ Trouver la répartition spatiale du champ électrique, puis celle de la charge volumique  $\rho$ , lorsque le champ extérieur dans le vide au voisinage de cette surface vaut  $\vec{E}_0 \vec{e}_x$ ,  $\vec{e}_x$  étant le vecteur unitaire porté par l'axe ( $Ox$ ).

On admettra que, loin de cette surface, le champ à l'intérieur tend vers zéro.

→ Donner une interprétation physique de  $\lambda_D$ .

→ Déterminer la charge volumique  $\rho_0$  sur la surface du conducteur en fonction de  $E_0$ ,  $\lambda_D$  et  $\epsilon_0$ .

**Conseil :** De quelle(s) variable(s) dépend le champ électrique ? Quelles sont les conditions aux limites ?



2)  $\lambda_D$  est de l'ordre de quelques nanomètres pour un conducteur usuel : pour un échantillon de taille macroscopique, il est alors commode d'introduire la charge surfacique  $\sigma$  du conducteur.

Exprimer  $\sigma$  en fonction de  $\rho_0$  et de  $\lambda_D$ , puis en fonction de  $E_0$  et de  $\epsilon_0$ .

**Conseil :** on peut calculer la charge surfacique à partir de sa définition ou des relations de continuité du champ électrique.

### EXS9.4 Câble coaxial :

Un câble coaxial cylindrique d'axe  $(Oz)$ , de rayon intérieur  $a$  et de rayon extérieur  $b$  est le siège d'un champ électromagnétique dont les champs électriques et magnétiques sont, en coordonnées cylindriques  $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$  :

$$\begin{cases} \vec{E}(M,t) = E(r) \cos(\omega t - kz) \vec{e}_r \\ \vec{B}(M,t) = \vec{B}_0(r) \cos(\omega t - kz) \end{cases} \text{ avec } \omega = ck, \text{ où } c \text{ est la vitesse de la lumière dans le vide.}$$

Les cylindres de rayons  $a$  et  $b$  sont des conducteurs parfaits : les champs électrique et magnétique sont nuls pour  $r > b$  et pour  $r < a$ . L'espace situé entre les cylindres de rayon  $a$  et  $b$  est le vide.

1) Calculer  $E(r)$  en utilisant l'équation de MAXWELL-GAUSS et les conditions aux limites.

On posera :  $E_a = \lim_{r \rightarrow a^+} E(r)$ .

2) Montrer que  $\vec{B}_0(r) = \frac{E_a a}{c} \vec{e}_\theta$ . On donne :  $\overrightarrow{\text{rot}}(\lambda \vec{a}) = \lambda \overrightarrow{\text{rot}} \vec{a} + \overrightarrow{\text{grad}} \lambda \times \vec{a}$ .

**Conseils :** Quelle équation de MAXWELL utiliser ? Quelle est la valeur de  $\overrightarrow{\text{rot}} \left( \frac{\vec{e}_r}{r} \right)$  ?

3) a) Utiliser les relations de continuité des champs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  pour déterminer les densités surfaciques de charge  $\sigma_a(z,t)$  et de courant  $\vec{j}_{sa}(z,t)$  sur l'armature cylindrique  $r = a$ .

b) De même, déterminer les densités surfacique  $\sigma_b(z,t)$  et  $\vec{j}_{sb}(z,t)$  sur l'armature cylindrique  $r = b$ .

c) Vérifier que  $\frac{\partial \sigma_{a/b}}{\partial t} + \frac{\partial j_{sa/b}}{\partial z} = 0$ .

Interprétation physique de cette équation pour  $r = a$  par exemple ? Pour répondre à cette question, faire un bilan de charges entre les instants  $t$  et  $t + dt$  pour la portion de conducteur cylindrique  $r = a$  comprise entre les côtes  $z$  et  $z + dz$ .

4) En utilisant (entre autre) la relation donnée à la question 2), déterminer le potentiel vecteur  $\vec{A}(r,z,t)$  et le potentiel scalaire  $V(r,z,t)$  dont dérive le champ électromagnétique entre les conducteurs.

On supposera que  $\vec{A} = A(r,z,t) \vec{e}_z$  et on montrera que  $A(r,z,t) = \frac{a}{c} \ln \frac{r}{b} E_a \cos(\omega t - kz)$ .

5) Soit  $U(z,t) = V(a,z,t)$  le potentiel du conducteur intérieur à l'abscisse  $z$  et à l'instant  $t$  et  $I(z,t)$  l'intensité du courant électrique porté par ce même conducteur.

Montrer que  $Z_c = \frac{U(z,t)}{I(z,t)}$  est indépendant de  $z$  et de  $t$ . Donner son expression.

6) Déterminer le vecteur de POYNTING à l'intérieur du câble coaxial.

On définit la puissance moyenne transférée à travers une section droite de ce câble de la manière suivante :

$$\mathcal{P}_m = \int_{r=a}^b \int_{\theta=0}^{2\pi} \langle \vec{\pi} \rangle \cdot d\vec{S}$$

Montrer qu'elle s'exprime simplement en fonction de  $Z_c$ . Commenter.

**EXS9.1** Conducteur dans l'ARQS

Un conducteur linéaire, de conductivité  $\gamma$ , occupe le demi-espace défini par  $z < 0$ . On étudie dans ce matériau les conséquences d'un courant sinusoïdal de densité de courant  $\vec{j} = J(z) \cos(\omega t) \vec{e}_x$ . On pourra utiliser la notation complexe (on note  $\underline{\vec{E}}$  le complexe associé au champ réel  $\vec{E}$ ).

- 1) Donner l'expression de  $\vec{E}$
- 2) On se place dans l'ARQS. À partir de symétrie et des invariances, montrer que :
  - a)  $\vec{B}$  est porté par  $\vec{e}_x$
  - b)  $\vec{B}$  ne dépend que de  $z$  et de  $t$ .

3) Rappeler les équations de MAXWELL dans l'ARQS.

- 4) Déterminer  $\vec{B}(z,t)$ .
- 5) Établir l'équation différentielle vérifiée par  $\underline{J}(z)$  ainsi que celle vérifiée par  $\underline{E}(z)$  et  $\underline{B}(z)$ .
- 6) Déterminer les solutions de l'équation caractéristique de l'équation différentielle précédente et mettre en évidence une longueur caractéristique de la variation spatiale des grandeurs  $\vec{j}$ ,  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$ .
- 7) Déterminer la loi  $\vec{j}(z,t)$  et interpréter le résultat en particulier en étudiant la variation de  $J$  avec la distance au plan  $Oxy$  à un instant donné.

1) D'après la loi d'OHM dans un conducteur, on a : 
$$\vec{E} = \frac{\vec{j}}{\gamma} = \frac{J(z)}{\gamma} \cos(\omega t) \vec{e}_x$$

- 2) a)  $\forall M \in \mathcal{E}$ ,  $(M, \vec{e}_x, \vec{e}_z)$  est un plan de symétrie ( $\Pi$ ) des courants. Comme  $\vec{B}(M) \perp (\Pi)$ , on a :  $\vec{B}(M,t) = B(M,t) \vec{e}_y$
- b) La distribution de courant est invariante par translation selon les directions des axes  $(Ox)$  et  $(Oy)$ . Donc le champ magnétique est indépendant des variables  $x$  et  $y$ . D'où : 
$$\vec{B}(M,t) = B(z,t) \vec{e}_y$$

3)	$\text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ (Maxwell-Gauss)	$\text{div} \vec{B} = 0$ (Maxwell-Flux)
	$\text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ (Maxwell-Faraday)	$\text{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$ (Maxwell-Ampère)

4) (Maxwell-Ampère)  $\implies \text{rot} \vec{B} = -\frac{\partial B}{\partial z} \vec{e}_x = \mu_0 J(z) \cos(\omega t) \vec{e}_x$ .

On en déduit : 
$$\vec{B}(z,t) = -\mu_0 \cos(\omega t) \left( \int J(z) dz \right) \vec{e}_x \quad \textcircled{1}$$

en introduisant une primitive de la fonction  $J(z)$ .

- 5) • On part de l'égalité d'analyse vectorielle :  $\text{rot}(\text{rot} \vec{a}) = \text{grad}(\text{div} \vec{a}) - \Delta \vec{a}$ . D'après la loi d'OHM, on a  $\vec{j} = \gamma \vec{E}$ , d'où :

$$\Delta \vec{j} = \gamma \Delta \vec{E} = \gamma [\text{grad}(\text{div} \vec{E}) - \text{rot}(\text{rot} \vec{E})]$$

- (Maxwell-Gauss)  $\implies \text{div} \vec{E} = 0$ , car  $\rho = 0$  dans un métal.
  - (Maxwell-Faraday)  $\implies \text{rot}(\text{rot} \vec{E}) = \text{rot} \left( -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) = -\frac{\partial \text{rot} \vec{B}}{\partial t}$
- $\hookrightarrow$  (Maxwell-Ampère)  $\implies \text{rot}(\text{rot} \vec{E}) = -\mu_0 \frac{\partial \vec{j}}{\partial t}$ .

Donc,  $\vec{j}$  vérifie la relation : 
$$\Delta j = \gamma \mu_0 \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} \quad (\star)$$

- Or  $\vec{j} = J(z) \cos(\omega t) \vec{e}_x$ , d'où  $\underline{\vec{j}} = \underline{J}(z) e^{j\omega t} \vec{e}_x$ , ce qui permet d'écrire :

$$\frac{\partial \underline{\vec{j}}}{\partial t} = j\omega \underline{J}(z) e^{j\omega t} \vec{e}_x \quad \text{et} \quad \Delta \underline{\vec{j}} = \frac{d^2 \underline{j}(z)}{dz^2} \vec{e}_x = \frac{d^2 \underline{J}(z)}{dz^2} e^{j\omega t} \vec{e}_x$$

D'où 
$$\frac{d^2 \underline{J}(z)}{dz^2} = j\gamma \mu_0 \omega \underline{J}(z) \quad \textcircled{2}$$

- D'après la loi d'OHM  $\vec{j} = \gamma \vec{E}$ , on peut remplacer  $\underline{J}(z)$  par  $\gamma \underline{E}(z)$  dans l'équation ②.

$$\underline{E}(z) \text{ satisfait donc la même équation différentielle : } \boxed{\frac{d^2 \underline{E}(z)}{dz^2} = j\gamma\mu_0\omega \underline{E}(z)} \quad \textcircled{3}$$

- Pour trouver l'équation vérifiée par  $\underline{B}(z)$ , on part de :

$$\text{rot}(\text{rot} \vec{B}) = \text{grad}(\text{div} \vec{B}) - \Delta \vec{B} = -\Delta \vec{B} \quad \text{car } \text{div} \vec{B} \equiv 0$$

$$\text{Avec : (Maxwell-Ampère)} \implies \text{rot}(\text{rot} \vec{B}) = \text{rot}(\mu_0 \vec{j}) = \mu_0 \gamma \text{rot} \vec{E}$$

$$\hookrightarrow \text{(Maxwell-Faraday)} \implies \text{rot}(\text{rot} \vec{B}) = -\mu_0 \gamma \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\text{D'où : } \boxed{\Delta \vec{B} = \mu_0 \gamma \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}} \quad (\star\star)$$

- En régime sinusoïdal permanent, on peut écrire

$\vec{B} = B(z,t)\vec{e}_y = B(z)\cos(\omega t + \varphi)\vec{e}_y$ , soit :  $\underline{B} = \underline{B}(z)e^{j\omega t + \varphi}\vec{e}_y$  où  $\varphi$  représente le déphasage du champ magnétique par rapport à la densité de courant dont la phase est prise comme origine des phases.

Puisque  $\vec{j}$  et  $\vec{B}$  ont des structures analogues et qu'ils vérifient la même «équation

de diffusion» (cf.  $(\star)$  et  $(\star\star)$ ), on en déduit :  $\boxed{\frac{d^2 \underline{B}(z)}{dz^2} = j\gamma\mu_0\omega \underline{B}(z)} \quad \textcircled{4}$

### 6) • $\underline{J}$ , $\underline{E}$ et $\underline{B}$ vérifient ainsi la même équation différentielle :

$$\frac{d^2 \underline{X}}{dz^2} = j\gamma\mu_0\omega \underline{X} \quad (E) \text{ d'équation caractéristique associée : } r^2 = j\gamma\mu_0\omega = \gamma\mu_0\omega e^{j\frac{\pi}{2}}.$$

$$\text{Les racines de cette équation caractéristique sont : } \left\{ \begin{array}{l} r_1 = \sqrt{\gamma\mu_0\omega} e^{j\frac{\pi}{4}} \\ r_2 = -\sqrt{\gamma\mu_0\omega} e^{j\frac{\pi}{4}} \end{array} \right.$$

- On peut introduire la distance  $\delta$  qui caractérise la variation spatiale en posant l'équation aux dimension suivantes :  $\left[ \frac{d^2 \underline{X}}{dz^2} \right] = \frac{[\underline{X}]}{[\delta^2]} = \frac{[\underline{X}]}{L^2} = [\gamma\mu_0\omega][\underline{X}]$ . On en déduit :

$$\boxed{\delta = \frac{1}{\sqrt{\gamma\mu_0\omega}}} \rightarrow \text{les racines : } \boxed{r_1 = \frac{1}{\delta\sqrt{2}} + j\frac{1}{\delta\sqrt{2}} = -r_2}$$

7) La solution  $\underline{J}(z)$  de l'équation différentielle ② est donc :

$$\underline{J}(z) = \alpha e^{r_1 z} + \beta e^{r_2 z} = \alpha \exp\left(\frac{z}{\delta\sqrt{2}}\right) \exp\left(j\frac{z}{\delta\sqrt{2}}\right) + \beta \exp\left(-\frac{z}{\delta\sqrt{2}}\right) \exp\left(-j\frac{z}{\delta\sqrt{2}}\right)$$

- La densité volumique de courant étant nécessairement finie,  $\underline{J}(z)$  ne doit pas diverger lorsque  $z \rightarrow \infty$ , ce qui impose  $\boxed{\beta = 0}$ .

On en déduit  $\vec{j}(z,t) = \underline{J}(z)e^{j\omega t}\vec{e}_x$  :

$$\vec{j} = \alpha \exp\left(\frac{z}{\delta\sqrt{2}}\right) \exp\left[j\left(\omega t + \frac{z}{\delta\sqrt{2}}\right)\right] \vec{e}_x$$

En notant  $J(0)$  la densité volumique de courant à l'interface du conducteur  $z = 0$ , on obtient :

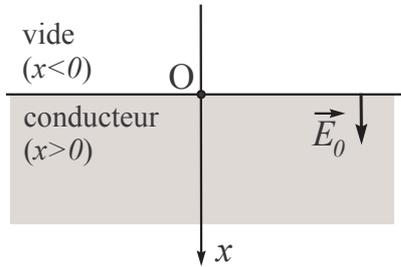
$$\boxed{\vec{j}(z,t) = J(0) \exp\left(\frac{z}{\delta_0}\right) \exp\left[j\left(\omega t + \frac{z}{\delta_0}\right)\right] \vec{e}_x}$$

- On retrouve que dans un métal (conducteur) en régime sinusoïdal de pulsation  $\omega$ , les courants sont localisés au voisinage de la surface sur une épaisseur  $\delta_0$  telle que :

$$\boxed{\delta_0 \equiv \delta\sqrt{2} = \sqrt{\frac{2}{\gamma\mu_0\omega}}} \text{ : c'est l'effet de peau.}$$

**EXS9.3** Conducteur en régime stationnaire

1) On considère un conducteur dont le champ électrique satisfait en régime stationnaire à l'équation différentielle:  $\Delta \vec{E} - \frac{\vec{E}}{\lambda_D^2} = \vec{0}$  (\*), où  $\lambda_D$  est une grandeur caractéristique du matériau.



Quelle est l'unité de cette grandeur?  
 La surface du conducteur es supposée plane et l'axe  $(Ox)$  est choisi selon sa normale.  
 → Trouver la répartition spatiale du champ élec-

trique, puis celle de la charge volumique  $\rho$ , lorsque le champ extérieur dans le vide au voisinage de cette surface vaut  $\vec{E}_0 \vec{e}_x$ ,  $\vec{e}_x$  étant le vecteur unitaire porté par l'axe  $(Ox)$ .

On admettra que, loin de cette surface, le champ à l'intérieur tend vers zéro.

→ Donner une interprétation physique de  $\lambda_D$ .

→ Déterminer la charge volumique  $\rho_0$  sur la surface du conducteur en fonction de  $E_0$ ,  $\lambda_D$  et  $\epsilon_0$ .

**Conseil :** De quelle(s) variable(s) dépend le chap électrique? Quelles sont les conditions aux limites?

2)  $\lambda_D$  est de l'ordre de quelques nanomètres pour un conducteur usuel: pour un échantillon de taille macroscopique, il est alors commode d'introduire la charge surfacique  $\sigma$  du conducteur.

Exprimer  $\sigma$  en fonction de  $\rho_0$  et de  $\lambda_D$ , puis en fonction de  $E_0$  et de  $\epsilon_0$ .

**Conseil :** on peut calculer la charge surfacique à partir de sa définition ou des relations de continuité du champ électrique.

1) Le système est invariant par translation selon  $(Oy)$  et  $(Oz)$ :  $\vec{E} = \vec{E}(x)$ . L'équation (\*) s'écrit alors:  $\frac{d^2 \vec{E}}{dx^2} - \frac{\vec{E}}{\lambda_D^2} = \vec{0}$ .

- $\lambda_D$  est une distance; on l'appelle «longueur de DEBYE»
- La solution de (\*) est de la forme:  $\vec{E} = \vec{\alpha} \exp\left(-\frac{x}{\lambda_D}\right) + \vec{\beta} \exp\left(\frac{x}{\lambda_D}\right)$ , en introduisant deux constantes vectorielles d'intégration.
- $\vec{\beta} = \vec{0}$  car  $\lim_{x \rightarrow \infty} \vec{E} = \vec{0}$ .

Par ailleurs, comme il y a continuité de la composante normale à l'interface conducteur/vide (puisque la seule distribution de charge dans cette question est volumique!), on en déduit que  $\vec{E}_0 = \vec{E}(0^-) = \vec{E}(0^+) = \vec{\alpha}$ .

D'où:  $\vec{E} = \vec{E}_0 \exp\left(-\frac{x}{\lambda_D}\right) = E_0 \exp\left(-\frac{x}{\lambda_D}\right) \vec{e}_x$

Rque: La longueur de DEBYE apparaît donc comme une épaisseur caractéristique de conducteur où le champ électrique est non nul.

• (Maxell-Gauss)  $\text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \implies \rho(x) = -\frac{\epsilon_0}{\lambda_D} E_0 \exp\left(-\frac{x}{\lambda_D}\right)$

On a donc  $\rho(x) = \rho_0 \exp\left(-\frac{x}{\lambda_D}\right)$ ,

avec  $\rho_0 = -\frac{\epsilon_0 E_0}{\lambda_D}$  la charge volumique à la côte  $x = 0$ .

2)  $\lambda_D$  étant très faible, la charge électrique est localisée au voisinage de la surface et le champ électrique ne prend de valeur notable qu'au voisinage de cette surface.

• On peut alors considérer que  $\vec{E} = \vec{0}$  pour  $x > 0$ . La relation de passage donnant, dans cette nouvelle modélisation surfacique:  $\vec{E}(0^+) - \vec{E}(0^-) = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{e}_x \Leftrightarrow \vec{0} - E_0 \vec{e}_x =$

$\frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{e}_x \Leftrightarrow \sigma = -\epsilon_0 E_0$

• On peut également définir la charge surfacique par :

$\sigma = \int_0^\infty \rho(x) dx = \rho_0 \lambda_D = -\epsilon_0 E_0 \rightarrow$  On retrouve bien entendu le même résultat.

**EXS9.4** **Câble coaxial :**

Un câble coaxial cylindrique d'axe ( $Oz$ ), de rayon intérieur  $a$  et de rayon extérieur  $b$  est le siège d'un champ électromagnétique dont les champs électriques et magnétiques sont, en coordonnées cylindriques ( $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z$ ) :

$$\begin{cases} \vec{E}(M,t) = E(r) \cos(\omega t - kz) \vec{e}_r \\ \vec{B}(M,t) = \vec{B}_0(r) \cos(\omega t - kz) \end{cases} \text{ avec } \omega = ck,$$

où  $c$  est la vitesse de la lumière dans le vide.

Les cylindres de rayons  $a$  et  $b$  sont des conducteurs parfaits : les champs électrique et magnétique sont nuls pour  $r > b$  et pour  $r < a$ . L'espace situé entre les cylindres de rayon  $a$  et  $b$  est le vide.

1) Calculer  $E(r)$  en utilisant l'équation de MAXWELL-GAUSS et les conditions aux limites.

On posera :  $E_a = \lim_{r \rightarrow a^+} E(r)$ .

2) Montrer que  $\vec{B}_0(r) = \frac{E_a a}{c r} \vec{e}_\theta$ . On donne :  $\text{rot}(\lambda \vec{a}) = \lambda \text{rot} \vec{a} + \text{grad} \lambda \times \vec{a}$ .

**Conseils :** Quelle équation de MAXWELL utiliser ?

Quelle est la valeur de  $\text{rot} \left( \frac{\vec{e}_r}{r} \right)$  ?

3) a) Utiliser les relations de continuité des champs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  pour déterminer les densités surfaciques de charge  $\sigma_a(z,t)$  et de courant  $\vec{j}_{sa}(z,t)$  sur l'armature cylindrique  $r = a$ .

b) De même, déterminer les densités surfacique  $\sigma_b(z,t)$  et  $\vec{j}_{sb}(z,t)$  sur l'armature cylindrique  $r = b$ .

c) Vérifier que  $\frac{\partial \sigma_{a/b}}{\partial t} + \frac{\partial j_{sa/b}}{\partial z} = 0$ .

→ Interprétation physique de cette équation pour  $r = a$  par exemple ? Pour répondre à cette question, faire un bilan de charges entre les instants  $t$  et  $t + dt$  pour la portion de conducteur cylindrique  $r = a$  comprise entre les côtes  $z$  et  $z + dz$ .

4) En utilisant (entre autre) la relation donnée à la question 2), déterminer le potentiel vecteur  $\vec{A}(r,z,t)$  et le potentiel scalaire  $V(r,z,t)$  dont dérive le champ électromagnétique entre les conducteurs.

On supposera que  $\vec{A} = A(r,z,t) \vec{e}_z$  et on montrera que  $A(r,z,t) = \frac{a}{c} \ln \frac{r}{b} E_a \cos(\omega t - kz)$ .

5) Soit  $U(z,t) = V(a,z,t)$  le potentiel du conducteur intérieur à l'abscisse  $z$  et à l'instant  $t$  et  $I(z,t)$  l'intensité du courant électrique porté par ce même conducteur.

→ Montrer que  $Z_c = \frac{U(z,t)}{I(z,t)}$  est indépendant de  $z$  et de  $t$ . Donner son expression.

6) Déterminer le vecteur de POYNTING à l'intérieur du câble coaxial.

On définit la puissance moyenne transférée à travers une section droite de ce câble de la manière suivante :  $\mathcal{P}_m = \int_{r=a}^b \int_{\theta=0}^{2\pi} \langle \vec{\pi} \rangle \cdot d\vec{S}$ .

→ Montrer qu'elle s'exprime simplement en fonction de  $Z_c$ . Commenter.

1) (Maxwell-Gauss) :  $\text{div} \vec{E} = 0$  dans l'espace entre les conducteurs (vide),

donc, en coordonnées cylindriques :  $\frac{1}{r} \frac{\partial r E(M,t)}{\partial r} = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{r} E(r) \cos(\omega t - kz) + \frac{dE(r)}{dr} \cos(\omega t - kz) = 0 \Leftrightarrow \frac{dE(r)}{dr} = -\frac{dr}{r} \implies E = \frac{Cte}{r}$$

Comme, en  $r = a^+$ ,  $E(a) \equiv E_a = \frac{Cte}{a}$ , on obtient :  $E(r) = \frac{a}{r} E_a$

2) (Maxwell-Faraday) :  $\text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \omega \sin(\omega t - kz) \vec{B}_0(r) \text{ ①}$ . Par ailleurs :

$$\begin{aligned} \text{rot} \vec{E} &= \text{rot} \left( a E_a \cos(\omega t - kz) \frac{\vec{e}_r}{r} \right) \\ &= a E_a \cos(\omega t - kz) \text{rot} \left( \frac{\vec{e}_r}{r} \right) + \text{grad} (a E_a \cos(\omega t - kz)) \times \frac{\vec{e}_r}{r} \end{aligned}$$

• Comme (1)  $\text{rot} \left( \frac{\vec{e}_r}{r} \right) = \vec{0}$  (le champ électrostatique d'un fil rectiligne infini  $\vec{E}(M) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \vec{e}_r$  est tel que  $\text{rot} \vec{E} = \vec{0}$ ),

(2) le gradient a une composante  $akE_a \sin(\omega t - kz)$  selon  $\vec{e}_z$ , on obtient :

$$\text{rot} \vec{E} = akE_a \sin(\omega t - kz) \vec{e}_z \times \frac{\vec{e}_r}{r} = \frac{a}{r} k E_a \sin(\omega t - kz) \vec{e}_\theta \text{ ②}$$

• Par identification de ① avec ②, on obtient :  $\vec{B}_0(r) = \frac{a}{r} \frac{k E_a}{\omega} \vec{e}_\theta$ , soit :  $\vec{B}_0 = \frac{E_a a}{c r} \vec{e}_\theta$  (\*)

3) a) Les relations de continuité du champ électromagnétique s'écrivent, en  $r = a$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{E}(M,t,r = a^+) - \vec{0} = \frac{\sigma_a}{\epsilon_0} \vec{e}_r \\ \vec{B}(M,t,r = a^+) - \vec{0} = \mu_0 \vec{j}_{sa} \times \vec{e}_r \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \sigma_a(z,t) = \epsilon_0 E_a \cos(\omega t - kz) \\ \vec{j}_{sa}(z,t) = \frac{1}{\mu_0} \frac{E_a}{c} \cos(\omega t - kz) \vec{e}_z \end{array}$$

b) Les relations de continuité du champ électromagnétique s'écrivent, en  $r = b$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{E}(M,t,r = b^-) \cdot \vec{0} = \frac{\sigma_b}{\epsilon_0} (-\vec{e}_r) \\ \vec{B}(M,t,r = b^-) - \vec{0} = \mu_0 \vec{j}_{sb} \times (-\vec{e}_r) \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \sigma_b(z,t) = -\epsilon_0 \frac{a}{b} E_a \cos(\omega t - kz) \\ \vec{j}_{sb}(z,t) = -\frac{a}{\mu_0 b} \frac{E_a}{c} \cos(\omega t - kz) \vec{e}_z \end{array}$$

c) • On vérifie que  $\frac{\partial \sigma_a}{\partial t} + \frac{\partial j_{sa}}{\partial z} = \left( -\epsilon_0 \omega + \frac{k}{\mu_0 c} \right) E_a \sin(\omega t - kz) = 0$

car  $\omega = kc$  et  $c^2 = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0}$ .

• L'intensité  $I_a$  qui parcourt le conducteur central à l'abscisse  $z$  et la date  $t$  est  $I_a(z,t) = \oint \vec{j}_{sa}(z,t) \cdot \vec{dl}_\perp = j_{sa} 2\pi a$ .

• La charge répartie en surface sur ce cylindre de hauteur  $dz$  est :  $Q_a(z,t) = \sigma_a(z,t) 2\pi a dz$ .

• Entre les instants  $t$  et  $t + dt$  :

★ il y a une variation  $dQ_a$  due au fait :

★ qu'il entre en  $z$  la charge  $I_a(z,t) dt$  et

★ qu'il sort en  $z + dz$  la charge  $I_a(z + dz,t) dt$ .

→ La conservation de la charge électrique de ce volume élémentaire de hauteur  $dz$  s'écrit, entre  $t$  et  $t + dt$  :

$$dQ_a = \delta^e Q_a = I_a(z,t) dt - I_a(z + dz,t) dt \Leftrightarrow \frac{\partial Q_a}{\partial t} = I_a(z,t) - I_a(z + dz,t) = -\frac{\partial I_a(z,t)}{\partial z} dz$$

Après simplification par  $2\pi a dz$ , on obtient l'équation qui traduit bien la conservation

locale de la charge :  $\frac{\partial \sigma_a}{\partial t} + \frac{\partial j_{sa}}{\partial z} = 0$ .

4) •  $\vec{A} = A(r,z,t) \vec{e}_z$  avec  $\text{rot} \vec{A} \equiv \vec{B}$  ③.

Or :  $\text{rot} \vec{A} = \text{rot}(A(r,z,t) \vec{e}_z) = A(r,z,t) \underbrace{\text{rot} \vec{e}_z}_{\vec{0}} + \overrightarrow{\text{grad}}(A(r,z,t)) \times \vec{e}_z = -\frac{\partial A(r,z,t)}{\partial r} \vec{e}_\theta$  ④

$\xrightarrow[\text{③}]{\text{④}} \frac{\partial A(r,z,t)}{\partial r} = -\frac{E_a}{c} \frac{a}{r} \cos(\omega t - kz)$  ; ce qui s'intègre en :

$A(r,z,t) = \frac{a}{c} \ln\left(\frac{r}{r_0}\right) E_a \cos(\omega t - kz) + f(z)$ . En choisissant  $r_0 = b$  et  $f(z) = 0$ , on

retrouve l'expression de l'énoncé :  $A(r,z,t) = \frac{a}{c} \ln\left(\frac{r}{b}\right) E_a \cos(\omega t - kz)$ .

• Pour calculer  $V(r,z,t)$ , on utilise la relation :  $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ . D'où

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{grad}}V &= -\vec{E} - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \\ &= -\frac{a}{r} E_a \cos(\omega t - kz) \vec{e}_r + \frac{a\omega}{c} \ln\left(\frac{r}{b}\right) E_a \sin(\omega t - kz) \vec{e}_z \\ &= \frac{\partial V}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{\partial V}{\partial z} \vec{e}_z \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial V}{\partial r} = -\frac{a}{r} E_a \cos(\omega t - kz) \\ \frac{\partial V}{\partial z} = ak \ln\left(\frac{r}{b}\right) E_a \sin(\omega t - kz) \end{array} \right. \rightarrow V(r,z,t) = -a E_a \ln\left(\frac{r}{b}\right) \cos(\omega t - kz)$$

A une constante près choisie nulle pour avoir  $V_{ext} = V(r \geq b) = 0$ .

$$5) \bullet \quad U(z,t) = V(a,z,t) = aE_a \ln\left(\frac{b}{a}\right) \cos(\omega t - kz)$$

$$I(z,t) = j_{sa}(z,t)2\pi a = \frac{2\pi a E_a}{\mu_0 c} \cos(\omega t - kz) = I_M \cos(\omega t - kz)$$

en posant  $I_M = 2\pi a \frac{E_a}{\mu_0 c}$

$$\bullet \text{ Soit : } Z_c \equiv \frac{U(z,t)}{I(z,t)} = \frac{\mu_0 c}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right) = \frac{1}{2\pi c \epsilon_0} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

$$6) \bullet \text{ Vecteur de POYNTING : } \vec{\pi} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0} = \frac{1}{\mu_0 c} \left(\frac{aE_a}{r}\right)^2 \cos^2(\omega t - kz) \vec{e}_z$$

$$\text{Et donc : } \langle \vec{\pi} \rangle = \frac{1}{\mu_0 c} \left(\frac{aE_a}{r}\right)^2 \langle \cos^2(\omega t - kz) \rangle \vec{e}_z = \frac{1}{2\mu_0 c} \left(\frac{aE_a}{r}\right)^2 \vec{e}_z$$

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_m &= \int_{r=a}^b \int_{\theta=0}^{2\pi} \langle \vec{\pi} \rangle \cdot d\vec{S} = \iint \frac{1}{2\mu_0 c} \left(\frac{aE_a}{r}\right)^2 \vec{e}_z \cdot r dr d\theta \vec{e}_z \\ &= 2\pi \frac{a^2 E_a^2}{2\mu_0 c} \int_a^b \frac{dr}{r} \\ &= \frac{1}{2} \underbrace{\frac{\mu_0 c}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right)}_{Z_c} \underbrace{\left(2\pi a \frac{E_a}{\mu_0 c}\right)^2}_{I_M^2} \\ &= \frac{1}{2} Z_c I_M^2 = Z_c \langle I^2 \rangle \end{aligned}$$

• Ainsi  $\mathcal{P}_m = Z \langle I^2 \rangle$  :  $Z_c$  est homogène à une impédance et permet l'écriture d'une relation classique de l'électrocinétique.

Comme  $Z_c$  est uniquement fonction des caractéristiques géométriques du câble, on l'appelle «**impédance caractéristique**».