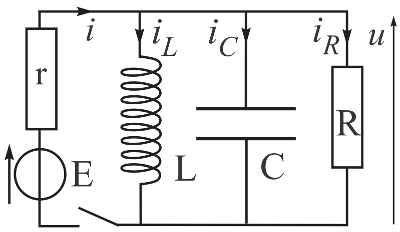
TD – Electrocinétique
Régime continu et Régime transitoire

EXTD3.1 Réponse d'un circuit *RLC* parallèle à un échelon de tension

Sur le schéma du montage ci-contre, le générateur de tension est idéal, de *f.é.m.* E constante. Les résistors sont linéaires, de résistances R et r constantes.

Tant que l'interrupteur est ouvert, le condensateur, de capacité C, est déchargé et la bobine idéale, d'inductance L, n'est parcourue par un aucun courant. À $t = 0$, l'interrupteur est fermé instantanément et on cherche à déterminer l'évolution ultérieure du réseau électrique.



1) Déterminer, par un raisonnement physique simple (pratiquement sans calcul), la tension u et les intensités i, i_L, i_C et i_R dans les quatre branches :

a) juste après la fermeture de l'interrupteur (instant $t = 0^+$),

b) au bout d'une durée très grande ($t \to \infty$).

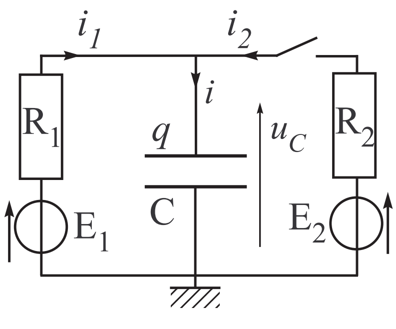
2) Établir l'équation différentielle liant i_R à ses dérivées par rapport au temps t.

3) Exprimer le facteur de qualité de ce circuit en fonction (entre autre) de $R_0 = \dfrac{rR}{r+R}$.

EXTD3.2 Étude d'un circuit *RC* avec deux sources

À $t < 0$, le circuit ci-contre a atteint son régime permanent.

À l'instant $t = 0$, on ferme l'interrupteur.



1) Sans résoudre d'équation différentielle, déterminer les comportements asymptotiques suivants :

a) $i(0^-)$, $i_1(0^-)$, $i_2(0^-)$ et $u_C(0^-)$ à l'instant $t = 0^-$.

b) $i(0^+)$, $i_1(0^+)$, $i_2(0^+)$ et $u_C(0^+)$ à l'instant $t = 0^+$.

c) $i(\infty)$, $i_1(\infty)$, $i_2(\infty)$ et $u_C(\infty)$ à l'instant $t = \infty$.

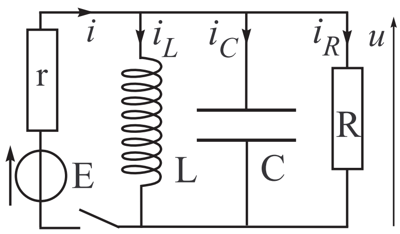
2) Établir l'équation différentielle vérifiée par $u_C(t)$.

$\to$ En déduire $u_C(t)$. On posera $\tau = \dfrac{R_2 R_1 C}{R_1 + R_2}$.

3) Sans calcul supplémentaire, donner les expressions de $i_1(t)$, $i_2(t)$ et $i(t)$.

EXTD3.1 Réponse d'un circuit RLC parallèle à un échelon de tension

Sur le schéma du montage ci-contre, le générateur de tension est idéal, de *f.é.m.* E constante. Les résistors sont linéaires, de résistances R et r constantes.
Tant que l'interrupteur est ouvert, le condensateur, de capacité C, est déchargé et la bobine idéale, d'inductance L, n'est parcourue par un aucun courant. À $t = 0$, l'interrupteur est fermé instantanément et on cherche à déterminer l'évolution ultérieure du réseau électrique.



1) Déterminer, par un raisonnement physique simple (pratiquement sans calcul), la tension u et les intensités i, i_L, i_C et i_R dans les quatre branches :

a) juste après la fermeture de l'interrupteur (instant $t = 0^+$),

b) au bout d'une durée très grande ($t \to \infty$).

2) Établir l'équation différentielle liant i_R à ses dérivées par rapport au temps t.

3) Exprimer le facteur de qualité de ce circuit en fonction (entre autre) de $R_0 = \dfrac{rR}{r+R}$.

Avant de se lancer dans la résolution, posons la la loi des nœuds et les relations qui existent entre les grandeurs électriques dans chaque branche (relations valables à chaque instant, $t \leq 0$ ou $t \geq 0$) :

$\boxed{i = i_L + i_C + i_R}$ ①

$\boxed{u = u_R = Ri_R}$ ②

$\boxed{u = u_C = \dfrac{q}{C}}$ avec : $\boxed{i_C = \dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = C\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}}$ ③

$\boxed{u = u_L = L\dfrac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}}$ ④

$\boxed{u = E - ri}$ ⑤

1.a) • Comme **l'intensité traversant une bobine est une fonction continue du temps** et que la bobine n'est parcourue par aucun courant pour $t < 0$: $\boxed{i_L(0^+) = i_L(0^-) = 0}$.

• Comme **la charge aux bornes d'un condensateur est une fonction continue du temps** et que le condensateur est déchargé pour $t < 0$:

$$\boxed{u(0^+) = \frac{q(0^+)}{C} = \frac{q(0^-)}{C} = 0}.$$

• Par ailleurs $\boxed{i_R(0^+) = \dfrac{u(0^+)}{R} = 0}$.

• Enfin ① $\xrightarrow[\text{comme } u(0^+)=0]{⑤}$ $\boxed{i_L(0^+) = i(0^+) = \dfrac{E}{r}}$

1.b) Lorsque le régime permanent continu est établi, le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert et la bobine se comporte comme un simple fil.

D'où $\boxed{i_C(\infty) = 0}$ et $\boxed{u(\infty) = 0}$.

Ce qui entraîne $\boxed{i_R(\infty) = 0}$ et $\boxed{i(\infty) = \dfrac{E}{r}}$.

La loi des nœuds donne enfin $\boxed{i_L(\infty) = i(\infty) = 0}$

2) MÉTHODOLOGIE : On cherche l'équation différentielle vérifiée par i_R.
Il faut donc exprimer tous les autres courants dans la loi des nœuds en fonction de i_R seulement.
Or, les relations ③, ④ et ⑤ montre qu'on peut facilement exprimer ces intensités en fonction de u, laquelle s'exprime à son tour facilement en fonction de i_R.
Puisque ④ met en jeu la dérivée de i_L par rapport au temps, on dérive ① par rapport au temps :

$$\hookrightarrow \ \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}i_C}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}i_R}{\mathrm{d}t}$$

qui devient, grâce à ③, ④ et ⑤: $\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}E-u}{\mathrm{d}t} = \frac{u}{L} + C\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\mathrm{d}i_R}{\mathrm{d}t}$

Enfin, puisque $u = Ri_R$, on obtient

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2i_R}{\mathrm{d}t^2} + \frac{1}{C}\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{r}\right)\frac{\mathrm{d}i_R}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{LC}i_R = 0} \ (\star)$$

3) L'équation différentielle d'ordre 2 qui s'écrit **sous sa forme canonique**:

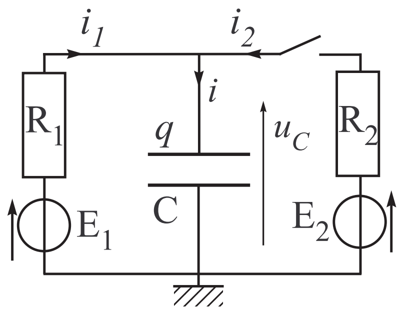
$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2i_R}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}i_R}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 i_R = 0} \ (\star)$$

avec $\boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}}$ **la pulsation propre** du circuit

et $\boxed{Q = R_0C\omega_0}$, son **facteur de qualité**,

en posant $\boxed{R_0 = r \parallel R = \frac{rR}{r+R}}$.

EXTD3.2 **Étude d'un circuit *RC* avec deux sources**



À $t < 0$, le circuit ci-contre a atteint son régime permanent.
À l'instant $t = 0$, on ferme l'interrupteur.

1) Sans résoudre d'équation différentielle, déterminer les comportements asymptotiques suivants :

a) $i(0^-)$, $i_1(0^-)$, $i_2(0^-)$ et $u_C(0^-)$ à l'instant $t = 0^-$.
b) $i(0^+)$, $i_1(0^+)$, $i_2(0^+)$ et $u_C(0^+)$ à l'instant $t = 0^+$.
c) $i(\infty)$, $i_1(\infty)$, $i_2(\infty)$ et $u_C(\infty)$ à l'instant $t = \infty$.

2) Établir l'équation différentielle vérifiée par $u_C(t)$.

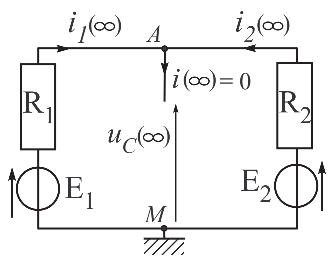
$\rightarrow$ En déduire $u_C(t)$. On posera $\tau = \dfrac{R_2 R_1 C}{R_1 + R_2}$.

3) Sans calcul supplémentaire, donner les expressions de $i_1(t)$, $i_2(t)$ et $i(t)$.

1.a) • L'interrupteur ouvert impose $\boxed{i_2(0^-) = 0}$.
• La loi des nœuds conduit à $i(0^-) = i_1(0^-)$.
• **Le régime continu étant établi** depuis suffisamment longtemps pour $t < 0$, le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert. D'où : $\boxed{i(0^-) = i_1(0^-) = 0}$.
• Le condensateur ayant été chargé sous la tension continue E_1, on en déduit que $\boxed{u_C(0^-) = E_1}$. (Une simple loi des mailles donne le même résultat).

1.b) • Comme **la charge aux bornes d'un condensateur est une fonction continue du temps**, on a $\boxed{u_C(0^+) = u_C(0^-) = E_1}$.
• La loi des mailles dans la première branche ($E_1 - R_1 i_1(0^+) - u_C(0^+) = 0$) conduit de nouveau à $\boxed{i_1(0^+) = 0}$.
• La loi des mailles dans la seconde branche ($E_2 - R_2 i_2(0^+) - u_C(0^+) = 0$) conduit à $\boxed{i_2(0^+) = \dfrac{E_2 - E_1}{R_2}}$.
• La loi des nœuds conduit à $\boxed{i(0^+) = i_1(0^+) + i_2(0^+) = \dfrac{E_2 - E_1}{R_2}}$.

1.c) • Lorsque $t \rightarrow \infty$, le condensateur est à nouveau en régime permanent continu : il se comporte comme un interrupteur ouvert, d'où $\boxed{i(\infty) = 0}$. On obtient le schéma équivalent ci-contre pour décrire le comportement asymptotique du circuit.



• La loi de Pouillet donne immédiatement :

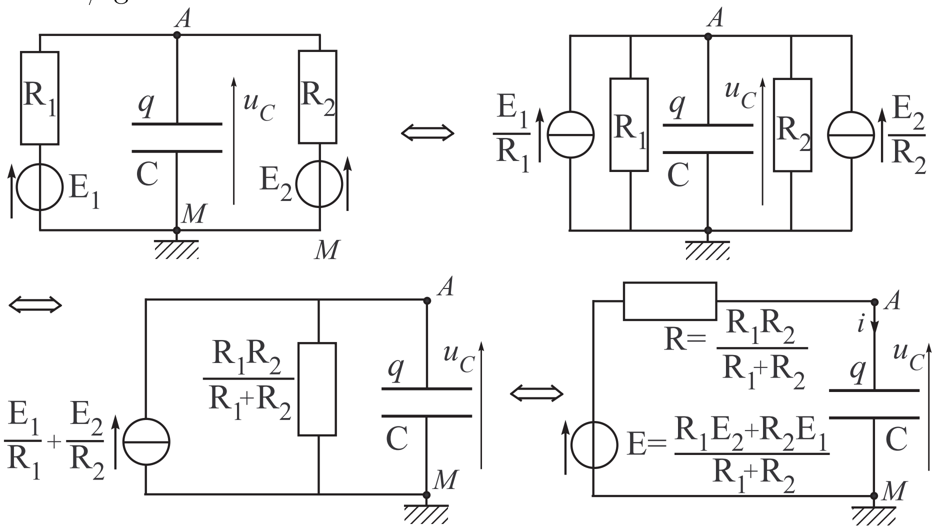
$$\boxed{i_1(\infty) = -i_2(\infty) = \frac{E_1 - E_2}{R_1 + R_2}}$$

• Et la loi des nœuds en termes de potentiels au point A donne :

$$\frac{V_M - V_A + E_1}{R_1} + \frac{V_M - V_A + E_2}{R_2} + 0 = 0$$

Soit : $\boxed{u_C(\infty) = V_A - V_M = \dfrac{R_1 E_2 + R_2 E_1}{R_1 + R_2}}$.

2) On simplifie le circuit par une série de transformations générateur de Thévenin / générateur de Norton :



• La loi des mailles dans le circuit équivalent final donne : $E - Ri - u_C = 0 \Leftrightarrow \dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + \dfrac{u_C}{RC} = \dfrac{E}{RC} \Leftrightarrow \boxed{\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + \dfrac{u_C}{\tau} = \dfrac{E}{\tau}}$ $(\star)$

en posant $\boxed{E = \dfrac{R_1E_2 + R_2E_1}{R_1 + R_2}}$ et $\boxed{R = \dfrac{R_1R_2}{R_1 + R_2}}$.

• La solution de $(\star)$ est de la forme $\mathbf{u_C(t) = u_G(t) + u_P}$, somme de la solution générale de l'équation différentielle homogène ($u_G(t)$) et d'une solution particulière de l'équation différentielle avec second membre (u_P).

• Ce second étant constant, on cherche une solution u_P constante : $\boxed{u_P = E}$.

• Ainsi : $\boxed{u_C(t) = A\exp\left(-\dfrac{t}{\tau}\right) + E = A\exp\left(-\dfrac{t}{\tau}\right) + u_C(\infty)}$ ①.

• La constante d'intégration se trouve grâce aux conditions initiales : $u_C(0^+) = E_1 = A + E \;\Rightarrow\; \boxed{A = \dfrac{R_1(E_1 - E_2)}{R_1 + R_2} = u_C(0^+) - u_C(\infty)}$ ②.

d'où : $\boxed{u_C(t) = \dfrac{R_1(E_1 - E_2)}{R_1 + R_2}\exp\left(-\dfrac{t}{\tau}\right) + \dfrac{R_1E_2 + R_2E_1}{R_1 + R_2}}$

3) Grâce à ① et ② : $\boxed{u_C(t) = (u_C(0^+) - u_C(\infty))\exp\left(-\dfrac{t}{\tau}\right) + u_C(\infty)}$.

Or, toutes les grandeurs électriques de ce circuit d'ordre 1 évoluent de la même manière, c'est-à-dire suivant la loi temporelle :

$x(t) = (x(0^+) - x(\infty))\exp\left(-\dfrac{t}{\tau}\right) + x(\infty)$.

Grâce à la question **1)** , on trouve :

$$\boxed{i_1(t) = \frac{E_1 - E_2}{R_1 + R_2}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)}$$

$$\boxed{i_2(t) = \frac{E_2 - E_1}{R_1 + R_2} + \frac{E_2 - E_1}{R_1 + R_2}\frac{R_1}{R_2}e^{-\frac{t}{\tau}}} \qquad \boxed{i(t) = \frac{E_2 - E_1}{R_2}e^{-\frac{t}{\tau}}}$$