

TD – Electrocinétique : Régime sinusoïdal



EXTD4.1 Association L/RC parallèle : (d'après ENAC 2004)

Le dipôle AB représenté sur le schéma ci-contre est alimenté par une source de tension parfaite de force électromotrice $e(t) = E_0 \sin(\omega t)$.

1) Exprimer L en fonction de R , C et ω pour que le dipôle AB soit équivalent à une résistance pure R_{eq} .

2) Calculer L sachant que $R = 100 \Omega$, $C = \frac{100}{3} \mu F$ et

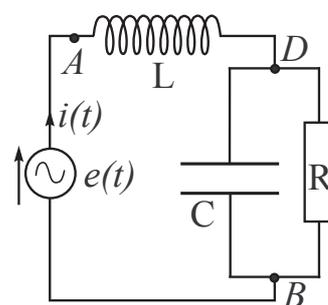
$\omega = 400 \text{ rad.s}^{-1}$.

3) L'amplitude de la force électromotrice du générateur vaut $E_0 = 180 \text{ V}$.

Calculer l'amplitude de l'intensité du courant I dans la bobine.

4) calculer les amplitudes des différences de potentiel U_{AD} et U_{DB} .

5) Calculer les amplitudes des intensités des courants I_R et I_C circulant respectivement dans la résistance et dans le condensateur.



EXTD4.2 Facteur de qualité d'un circuit RLC parallèle

(d'après Morellet/Grossart, p. 221, 235)

Le circuit représenté est alimenté par une source de courant sinusoïdal d'intensité $i(t) = I_0 \cos(\omega t)$.

1) Exprimer l'amplitude complexe \underline{U} de la tension $u(t)$ aux bornes du circuit en fonction des données du problème.

2) Montrer que l'amplitude U_m de $u(t)$ passe par un maximum pour une valeur ω_0 de la pulsation à déterminer.

3) Tracer la courbe donnant les variations de U_m en fonction de ω . Préciser la largeur $\Delta\omega = \omega_1 - \omega_2$ de la courbe de réponse, où ω_1 et ω_2 sont les pulsations telles

que $U_m = \frac{U_m(max)}{\sqrt{2}}$.

4) Exprimer en fonction de R , L et C le facteur de qualité Q du circuit, défini par $\frac{1}{Q} = \frac{\Delta\omega}{\omega_0}$.

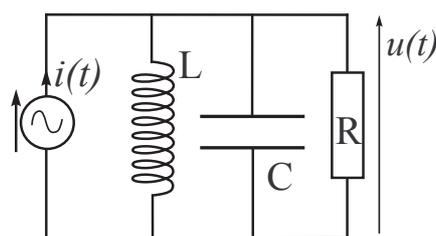
5) Exprimer la puissance électrique moyenne \mathcal{P} fournie par la source de courant.

6) Montrer que la puissance \mathcal{P} passe par un maximum pour une pulsation à déterminer.

7) On pose $x = \frac{\omega}{\omega_0}$. Exprimer la puissance \mathcal{P} sous la forme: $\mathcal{P} = \frac{\mathcal{P}_{max}}{1 + A(x - \frac{1}{x})^2}$

en donnant les expressions de \mathcal{P}_{max} et de A .

8) Déterminer la largeur relative $\frac{\Delta\omega}{\omega_0}$ de l'intervalle de pulsations $\Delta\omega$ telles que $\mathcal{P} > \frac{\mathcal{P}_{max}}{2}$.



EXTD4.1 Association L/RC parallèle : (d'après ENAC 2004)

Le dipôle AB représenté sur le schéma ci-contre est alimenté par une source de tension parfaite de force électromotrice $e(t) = E_0 \sin(\omega t)$.

1) Exprimer L en fonction de R , C et ω pour que le dipôle AB soit équivalent à une résistance pure R_{eq} .

2) Calculer L sachant que $R = 100 \Omega$, $C = \frac{100}{3} \mu F$ et

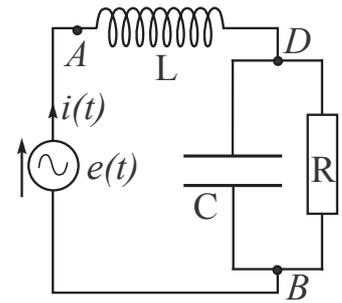
$\omega = 400 \text{ rad.s}^{-1}$.

3) L'amplitude de la force électromotrice du générateur vaut $E_0 = 180 \text{ V}$.

Calculer l'amplitude de l'intensité du courant I_0 dans la bobine.

4) calculer les amplitudes des différences de potentiel U_{AD} et U_{DB} .

5) Calculer les amplitudes des intensités des courants I_R et I_C circulant respectivement dans la résistance et dans le condensateur.



$$1) \quad \underline{Z}_{DB} = \frac{R \frac{1}{jC\omega}}{R + \frac{1}{jC\omega}} = \frac{R}{1 + RC\omega} \quad (*)$$

$$\underline{Z}_{AB} = \underline{Z}_{AD} + \underline{Z}_{DB} = jL\omega + \frac{R}{1 + RC\omega} = \frac{R(1 - LC\omega^2) + jL\omega}{1 + jRC\omega}$$

$$\underline{Z}_{AB} = \frac{R + j(L\omega - R^2C\omega(1 - LC\omega^2))}{1 + R^2C^2\omega^2} = R_{eq} \Leftrightarrow L\omega - R^2C\omega(1 - LC\omega^2) = 0$$

$$\hookrightarrow \quad \underline{L} = \frac{R^2C}{1 + R^2C^2\omega^2} \quad \text{Alors : } \underline{Z}_A = R_{eq} = \frac{R}{1 + R^2C^2\omega^2} = \frac{L}{RC}$$

$$2) \quad \underline{L} = 120 \text{ mH}$$

$$3) \quad \underline{E} = \underline{Z}_{AB} \underline{I} = R_{eq} \underline{I} \Rightarrow \underline{I}_0 = \frac{E_0}{R_{eq}} = \frac{RC}{L} E = 5 \text{ A}$$

$$4) \quad \bullet \quad \underline{U}_{AD} = jL\omega \underline{I} \Rightarrow \underline{U}_{AD} = L\omega I_0 = 240 \text{ V}$$

$$\bullet \text{ D'après } (*) : \underline{U}_{DB} = \underline{Z}_{DB} \underline{I} = \frac{R}{1 + RC\omega} \underline{I} \Rightarrow \underline{U}_{DB} = \frac{R}{\sqrt{1 + R^2C^2\omega^2}} I_0 = 300 \text{ V}$$

Rque : Attention ! On rappelle que la loi d'additivité des tensions (loi des mailles) est valable, en régime sinusoïdal, pour les tensions réelles ($e(t) = u_{AD}(t) + u_{DB}(t)$) ou en amplitudes complexes ($\underline{E} = \underline{U}_{AD} + \underline{U}_{DB}$). **Par contre**, comme on le vérifie ici, la loi d'additivité des tensions **ne s'applique pas pour les amplitudes** (réelles) : $E_0 \neq U_{AD} + U_{DB}$.

5) La tension \underline{U}_{DB} est reliée aux intensités \underline{I}_C et \underline{I}_R :

$$\underline{U}_{DB} = \frac{1}{jC\omega} \underline{I}_C \text{ et } \underline{U}_{DB} = R \underline{I}_R$$

$$\text{On en déduit : } \underline{I}_C = C\omega \underline{U}_{DB} = 4 \text{ A} \quad \text{et} \quad \underline{I}_R = \frac{\underline{U}_{DB}}{R} = 3 \text{ A}$$

Rque : Attention ! Notez bien que la loi des nœuds est vérifiée pour les courants réels ($i(t) = i_R(t) + i_C(t)$) et en amplitude complexes ($\underline{I}(t) = \underline{I}_R(t) + \underline{I}_C(t)$) mais **elle ne s'applique pas pour les amplitudes** (réelles) : $I \neq I_C + I_R$.

EXTD4.2 Facteur de qualité d'un circuit *RLC* parallèle

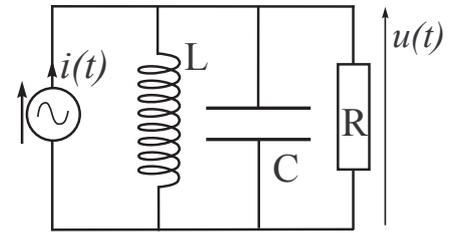
(d'après Morellet/Grossart, p. 221, 235)

Le circuit représenté est alimenté par une source de courant sinusoïdal d'intensité $i(t) = I_0 \cos(\omega t)$.

1) Exprimer l'amplitude complexe \underline{U} de la tension $u(t)$ aux bornes du circuit en fonction des données du problème.

2) Montrer que l'amplitude U_m de $u(t)$ passe par un maximum pour une valeur ω_0 de la pulsation à déterminer.

3) Tracer la courbe donnant les variations de U_m en fonction de ω . Préciser la largeur $\Delta\omega = \omega_1 - \omega_2$ de la courbe de réponse, où ω_1 et ω_2 sont les pulsations telles que $U_m = \frac{U_m(max)}{\sqrt{2}}$.



4) Exprimer en fonction de R , L et C le facteur de qualité Q du circuit, défini par $\frac{1}{Q} = \frac{\Delta\omega}{\omega_0}$.

5) Exprimer la puissance électrique moyenne \mathcal{P} fournie par la source de courant.

6) Montrer que la puissance \mathcal{P} passe par un maximum pour une pulsation à déterminer.

7) On pose $x = \frac{\omega}{\omega_0}$. Exprimer la puissance \mathcal{P} sous la forme: $\mathcal{P} = \frac{\mathcal{P}_{max}}{1 + A(x - \frac{1}{x})^2}$

en donnant les expressions de \mathcal{P}_{max} et de A .

8) Déterminer la largeur relative $\frac{\Delta\omega}{\omega_0}$ de l'intervalle de pulsations $\Delta\omega$ telles que $\mathcal{P} > \frac{\mathcal{P}_{max}}{2}$.

1) En notation complexe, on a $\underline{I} = \underline{Y}\underline{U}$ en introduisant l'impédance du dipôle *RLC* parallèle: $\underline{Y} = \underline{Y}_R + \underline{Y}_C + \underline{Y}_L = \frac{1}{R} + j\left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right)$.

$$\text{D'où: } \underline{U} = \frac{\underline{I}}{\frac{1}{R} + j\left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right)}$$

2) $U_m = |\underline{U}| = \frac{I_0}{\sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right)^2}}$, fonction qui est maximale lorsque

$\left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right)^2$ est minimal, soit pour $\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$.

3) • On constate que $\lim_{\omega \rightarrow 0} U_m(\omega) = \lim_{\omega \rightarrow \infty} U_m(\omega) = 0$.

• Pour $\omega = \omega_0$, $U_m = U_m(max) = RI$.

• Les pulsations de coupures ω_1 et ω_2 vérifient:

$$\frac{I}{\sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right)^2}} = \frac{RI}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \frac{1}{R^2} + \left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right)^2 = \frac{2}{R^2} \Leftrightarrow C\omega - \frac{1}{L\omega} = \pm \frac{1}{R}$$

Les pulsations ω_1 et ω_2 sont donc les racines positives des équations du second degré:

$$LC\omega^2 \pm \frac{L}{R}\omega - 1 = 0 \text{ ①/②}$$

$$\text{Le discriminant de ①/② est } \Delta = \frac{L^2}{R^2} + 4LC = \frac{L^2}{R^2} \left(1 + 4R^2 \frac{C}{L}\right)$$

$$\hookrightarrow \omega_2 = \frac{\frac{L}{R} + \sqrt{\Delta}}{2LC} = \frac{1}{2RC} \left(1 + \sqrt{1 + 4R^2 \frac{C}{L}} \right)$$

$$\hookrightarrow \omega_1 = \frac{-\frac{L}{R} + \sqrt{\Delta}}{2LC} = \frac{1}{2RC} \left(-1 + \sqrt{1 + 4R^2 \frac{C}{L}} \right)$$

4) La largeur de la bande passante est donc : $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = \frac{1}{RC}$,

d'où un facteur de qualité $Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} = RC\omega_0 = R\sqrt{\frac{C}{L}}$

5) La puissance électrique moyenne \mathcal{P} consommée par une admittance \underline{Y} s'écrit (en introduisant φ le déphasage de $u(t)$ par rapport à $i(t)$):

$$\mathcal{P} = \frac{U_m I_0}{2} \cos \varphi = \frac{1}{2} \mathcal{R}e(\underline{Y}) U_m^2.$$

• D'après la question 1) et l'expression de \underline{Y} (qui donne $\mathcal{R}e(\underline{Y}) = \frac{1}{R}$),

comme $U_m = \frac{I_0}{Y}$ on obtient : $\mathcal{P} = \frac{1}{2R} \frac{I_0^2}{\frac{1}{R^2} + \left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right)^2}$

$$\Leftrightarrow \mathcal{P} = \frac{1}{2} \frac{RI_0^2}{1 + R^2 \left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right)^2} = \frac{\mathcal{P}_{max}}{1 + R^2 \left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right)^2}$$

en posant $\mathcal{P}_{max} = \frac{1}{2} RI_0^2 = RI_{eff}^2$.

6) • $\mathcal{P} = \mathcal{P}_{max} \Leftrightarrow C\omega - \frac{1}{L\omega} = 0 \Leftrightarrow \omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

7) Comme $\omega = x\omega_0 = x\sqrt{\frac{1}{LC}}$:

$$\mathcal{P} = \frac{\mathcal{P}_{max}}{1 + R^2 \frac{C}{L} \left(x - \frac{1}{x}\right)^2} \Rightarrow \mathcal{P} = \frac{\mathcal{P}_{max}}{1 + Q^2 \left(x - \frac{1}{x}\right)^2}$$

8) d'après 7), $\mathcal{P} = \frac{\mathcal{P}_{max}}{2} \Leftrightarrow 1 + Q^2 \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = 2 \Leftrightarrow x^2 \mp \frac{x}{Q} - 1 = 0$

Après calculs (si on ne se rend pas compte qu'on a affaire aux mêmes polynômes),

on retrouve la bande passante calculée en 4), d'où : $\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_0} = \frac{1}{Q}$.