TD – Electrocinétique : Puissance en régime sinusoïdal

EXTD5.1 **Bilan électrique en régime sinusoïdal forcé :** (d'après Banque G2E 2000)

1) Un dipôle est alimenté en régime sinusoïdal forcé par une tension $u(t) = U\sqrt{2}\cos(2\pi f t)$ avec $U = 200\ V$ et $f = 50\ Hz$.
L'intensité du courant qui le parcourt est alors $i(t) = I_0\sqrt{2}\cos(2\pi f t + \varphi)$.

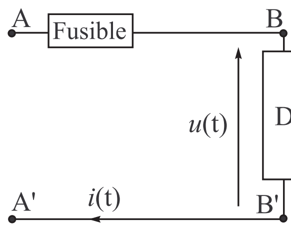
a) En fonction de U, I et φ, donner les expressions de :

• L'impédance complexe $\underline{Z}$ et de son module Z (on notera j le nombre imaginaire pur tel que $j^2 = -1$).

• La puissance électrique moyenne $\mathcal{P}_e$ absorbée par le dipôle.

b) En déduire l'expression de $\mathcal{P}_e$ en fonction de U, Z et R, R étant la résistance électrique du dipôle.

2) Un fusible de 16 A protège une ligne électrique $\{AB,A'B'\}$ alimentant en régime sinusoïdal forcé, sous une tension efficace $U = 220\ V$ et une fréquence $f = 50\ Hz$, un dipôle (D) assimilable à une bobine d'inductance $L = 30.10^{-3}\ H$ en série avec un dipôle ohmique de résistance R.



L'intensité efficace maximale admissible dans la ligne est $I_{max} = 16\ A$.
Ce dipôle absorbe une puissance électrique moyenne $\mathcal{P}_e = 2\,500\ W$.
La ligne $\{AB,A'B'\}$ se comporte comme un dipôle purement ohmique de résistance électrique totale $R_0 = 1{,}2\ \Omega$, fusible compris.

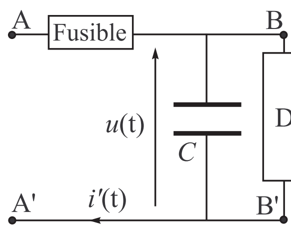
a) Calculer les deux valeurs possibles R_1 et R_2 de la résistance R du dipôle (D).

b) Pour chaque valeur R_1 et R_2, calculer l'intensité efficace I_1 et I_2 dans le dipôle (D).

c) Déterminer la seule valeur de R possible compte tenu de la présence du fusible.

d) En déduire l'intensité efficace I_0 du courant électrique circulant dans la ligne $\{AB,A'B'\}$ et la puissance $\mathcal{P}_0$ dissipée par effet JOULE dans cette ligne.

3) On ajoute, en parallèle sur le dipôle (D), un condensateur de capacité $C = 130{,}4.10^{-6}\ F$.



a) Calculer les intensités efficaces :

α) I_D dans le dipôle (D)

β) I_C dans le condensateur

γ) I_0' dans la ligne.

b) Déterminer la puissance $\mathcal{P}_0'$ dissipée par effet JOULE dans la ligne.

c) Comparer $\mathcal{P}_0'$ et $\mathcal{P}_0$. Conclure sur l'intérêt de ce condensateur.

1) $u(t) = U\sqrt{2}\cos(2\pi ft)$, $U = 220\ V$ et $f = 5\ Hz$; $i(t) = I_0\sqrt{2}\cos(2\pi ft + \varphi)$.

1.a.α) $\underline{U} = \underline{Z}\underline{I} \rightarrow \underline{Z} = \dfrac{\underline{U}}{\underline{I}} = \dfrac{U\sqrt{2}}{I_0\sqrt{2}e^{j\varphi}} \rightarrow \boxed{\underline{Z} = \dfrac{U}{I_0}e^{-j\varphi}}$

1.a.β)

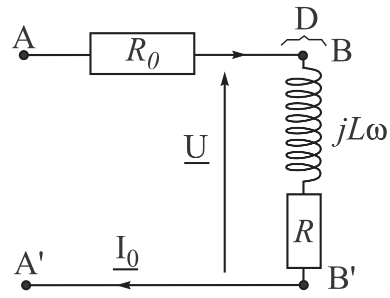
$$\begin{aligned} <\mathcal{P}> = <u(t)i(t)> &= <U\sqrt{2}\cos(2\pi ft)I\sqrt{2}\cos(2\pi ft+\varphi)> \\ &= 2UI_0 < \frac{1}{2}(\cos(4\pi ft + \varphi) + \cos\varphi) > \\ &\rightarrow \boxed{\mathcal{P}_e = <\mathcal{P}> = UI_0\cos\varphi} \end{aligned}$$

1.b) $\mathcal{P}_e = UI_0\cos\varphi$ et $I = \dfrac{U}{Z}$. Par ailleurs : $\cos\varphi = \cos(\arg(\underline{Z})) = \dfrac{\mathcal{R}_e(\underline{Z})}{Z} \equiv \dfrac{R}{Z}$.

D'où : $\boxed{\mathcal{P}_e = \dfrac{U^2}{Z^2}R}$.

2) $\mathcal{P}_e = 2\,500\ W$ et $L = 30\ mH$.

De plus : $\mathcal{P}_e = \dfrac{U^2}{Z^2}R = \dfrac{U^2R}{R^2 + L^2\omega^2}$.



2.a) D'où : $\boxed{\mathcal{P}_eR^2 - U^2R + L^2\omega^2\mathcal{P}_e = 0}$

Polynôme de degré 2 de discriminant :
$\Delta = «b^2 - 4ac» = U^4 - 4L^2\omega^2\mathcal{P}_e$

On vérifie que $\Delta \simeq 121{,}9.10^6\ V^4 > 0$

Ce qui signifie que le polynôme admet deux solutions réelles :

$$\begin{cases} R_1 = «\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}» = \dfrac{U^2 - \sqrt{\Delta}}{2\mathcal{P}_e} & \rightarrow \boxed{R_1 \simeq 7{,}5\ \Omega} \\ R_2 = «\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}» = \dfrac{U^2 + \sqrt{\Delta}}{2\mathcal{P}_e} & \rightarrow \boxed{R_2 \simeq 11{,}9\ \Omega} \end{cases}$$

2.b) $I_0 = \dfrac{U}{Z} = \dfrac{U}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}} \rightarrow$ deux intensités possibles :

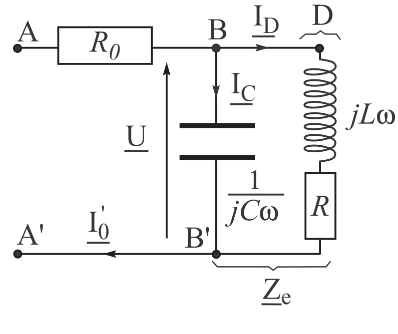
Si $R = R_1$, $\boxed{I_0 = I_1 \simeq 18{,}3\ A}$ et si $R = R_2$, $\boxed{I_0 = I_2 \simeq 14{,}5\ A}$.

2.c/d) Puisque le fusible impose $I_0 < 16\ A$,

on en déduit que $\boxed{R = R_2 \simeq 11{,}9\ \Omega}$ et $\boxed{I_0 = I_2 \simeq 14{,}5\ A}$.

D'où : $\boxed{\mathcal{P}_0 = <\mathcal{P}_J> = \dfrac{1}{2}R_{tot}I_m^2 = (R_0 + R)I_0^2 = 2\,750\ W}$.

3) $\underline{Z}_e = \dfrac{\dfrac{1}{jC\omega}(R + jL\omega)}{\dfrac{1}{jC\omega} + R + jL\omega} = \dfrac{R + jL\omega}{1 - LC\omega^2 + jRC\omega}$



$$\underline{U} = \begin{cases} \dfrac{1}{jC\omega}\underline{I}_C \\ (R + jL\omega)\underline{I}_D \\ \underline{Z}_e\underline{I}'_0 \end{cases}$$

De plus : $C = 130{,}4\ \mu F$ et $R = R_2 \simeq 11{,}9\ \Omega$.

3.a.α) $\rightarrow$ $\boxed{\underline{I}_D = \dfrac{U}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}} \simeq 14{,}5\ A}$.

3.a.β) $\rightarrow$ $\boxed{\underline{I}_C = C\omega U \simeq 9{,}0\ A}$.

3.a.γ) $\rightarrow$ $\boxed{\underline{I}'_0 = \dfrac{U}{Z_e} = \dfrac{\sqrt{(1-LC\omega^2)^2+(RC\omega)^2}}{R^2+L^2\omega^2} \simeq 11{,}4\ A}$

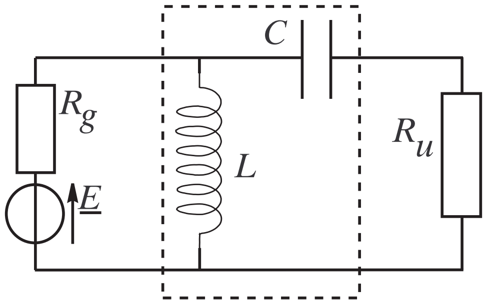
3.b) $\mathcal{P}'_0 = < \mathcal{P}'_J >$ est la puissance dissipée par effet JOULE dans la ligne au niveau de la résistance R_0 parcourue par l'intensité efficace I'_0 et de la résistance $R = R_2$ parcourue par l'intensité efficace I_D. D'où :

$$\boxed{\mathcal{P}'_0 = R_0 I'^2_0 + R_2 I_D^2 \simeq 2\,654\ W}$$

3.c) $\boxed{\mathcal{P}'_0 < \mathcal{P}_0}$: l'ajout du condensateur permet de faire baisser les pertes par effets JOULE en faisant diminuer l'intensité efficace dans la ligne($I'_0 < I_0$).

EXTD5.2 (=**EXE5.16**)

Pour transmettre une puissance maximale du générateur ($\underline{E}$,R_g) à l'impédance de charge (d'utilisateur) $R_u \neq R_g$, on intercale entre le générateur et l'utilisateur un quadipôle réalisé avec une bobine d'inductance L et un condensateur de capacité C.
$\rightarrow$ Montrer que le quadripôle permet l'adaptation d'impédance souhaitée lorsque $R_u < R_g$.
Calculer L et C en fonction de R_u, R_g et ω pulsation du générateur, afin de réaliser un transfert maximal d'énergie.



• Le générateur est branché sur un dipôle constitué d'une bobine en parallèle avec un condensateur en série avec une résistance. Appelons $\underline{Z}$ son impédance équivalente ($\underline{Z} = jL\omega // (R_u + \dfrac{1}{jC\omega})$).

La puissance moyenne reçue par un condensateur ou une bobine est nulle ($<\mathcal{P}_C> = <\mathcal{P}_L> = 0$). Le quadripôle intercalé entre le générateur et le récepteur R_u étant constitué de tels dipôles réactifs, la puissance fournie par le générateur est transmise sans pertes à l'utilisateur (R_u).

Donc «chercher la condition de transfert maximal d'énergie entre le générateur et R_u» revient à chercher la condition de transfert maximal d'énergie entre le générateur et le dipôle d'impédance $\underline{Z}$.

Or pour que le générateur fournisse une puissance maximale, il faut qu'il soit branché sur une impédance $\underline{Z}$ telle que : $\boxed{\underline{Z} = \underline{Z_g}^* = R_g}$ (**condition d'adaptation d'impédance** ($\star$)).

• Exprimons $\underline{Z}$: $\underline{Z} = jL\omega // (R_u + \dfrac{1}{jC\omega}) = \dfrac{jL\omega\left(R_u + \dfrac{1}{jC\omega}\right)}{R_u + j\left(L\omega - \dfrac{1}{C\omega}\right)}$

$(\star) \Leftrightarrow \left(R_g R_u - \dfrac{L}{C}\right) + j\omega\left[L\left(R_g - R_u\right) - \dfrac{R_g}{C\omega^2}\right] = 0$

L'égalité à zéro entraîne :

$$\frac{L}{C} = R_g R_u \quad \text{et} \quad LC = \frac{R_g}{\omega^2\left(R_g - R_u\right)} > 0 \Rightarrow \boxed{R_g > R_u}$$

On en déduit : $\boxed{L = \dfrac{R_g}{\omega}\sqrt{\dfrac{R_u}{R_g - R_u}}}$ et $\boxed{C = \dfrac{1}{\omega\sqrt{R_u\left(R_g - R_u\right)}}}$