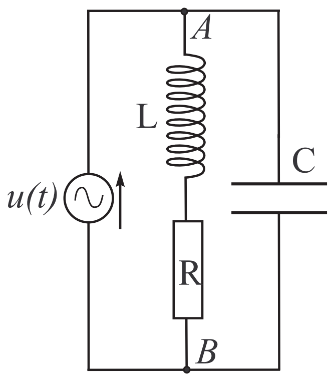
TD – Electrocinétique : Puissance en régime sinusoïdal (2)

EXTD6.1 **Bilan de puissance** (d'après G2E 2004 + Dervieux/Simon [Ellipses])
Un générateur de tension de force électromotrice $e(t) = E_0\sqrt{2}\sin(\omega t)$ et de résistance interne R_0 alimente une impédance $\underline{Z}$ de résistance R et de réactance X.

1) Exprimer l'intensité efficace I_0 qui traverse cette impédance en fonction de E_0, R_0, R et X.
2) Exprimer $\mathcal{P}$ la puissance moyenne reçue par l'impédance en fonction de R et I_0.
Faut-il en déduire que $\mathcal{P}$ est indépendante de X ?
3) On suppose que l'impédance est un résistor de résistance R (donc $X = 0$). Montrer que $\mathcal{P} = \mathcal{P}(R)$ passe par un maximum.
Calculer la valeur R_m correspondante à ce maximum ainsi que la puissance dissipée correspondante. On donne : $E_0 = 220\ V$; $R_0 = 10\ \Omega$ et $\omega = 314\ rad.s^{-1}$.
4) On insère dans le circuit précédent une bobine idéale d'inductance $L = 0{,}1\ H$. Calculer la puissance moyenne $\mathcal{P}'(R)$ dissipée dans le résistor.
Montrer que quelque soit R, le rapport $\dfrac{\mathcal{P}'(R)}{\mathcal{P}(R)}$ est inférieur à 1.
Calculer la valeur R'_m pour laquelle $\mathcal{P}'(R)$ est maximale.

EXTD6.2 **Caractéristiques d'un circuit oscillant** (Dervieux/Simon [Ellipses])
Le circuit oscillant de la figure ci-contre dissipe une puissance (moyenne) de $\mathcal{P} = 40\ kW$. La tension efficace à ses bornes est de $U = 12\ kV$ et la fréquence est $f = 480\ kHz$.



1) Calculer numériquement la résistance équivalente R_e qui dissiperait la même puissance.
2) Exprimer l'admittance complexe $\underline{Y}$ du dipôle AB.
3) Comment doit être la partie imaginaire de $\underline{Y}$ lorsque le dipôle a un comportement purement résistif?
Exprimer R_e en fonction de R, L et C lorsque la fréquence est telle que l'admittance complexe $\underline{Y}$ est purement résistive.
4) Le cœfficient de surtension du circuit oscillant est $Q = \dfrac{L\omega}{R}$.
Exprimer C et L en fonction de R_e, Q et f.
Calculer L et C pour $Q = 16$.

EXTD6.1 **Bilan de puissance** (d'après G2E 2004 + Dervieux/Simon)

Un générateur de tension de force électromotrice $e(t) = E_0\sqrt{2}\sin(\omega t)$ et de résistance interne R_0 alimente une impédance $\underline{Z}$ de résistance R et de réactance X.

1) Exprimer l'intensité efficace I_0 qui traverse cette impédance en fonction de E_0, R_0, R et X.

2) Exprimer $\mathcal{P}$ la puissance moyenne reçue par l'impédance en fonction de R et I_0.

Faut-il en déduire que $\mathcal{P}$ est indépendante de X ?

3) On suppose que l'impédance est un résistor de résistance R (donc $X = 0$). Montrer que $\mathcal{P} = \mathcal{P}(R)$ passe par un maximum.

Calculer la valeur R_m correspondante à ce maximum ainsi que la puissance dissipée correspondante. On donne : $E_0 = 220\ V$; $R_0 = 10\ \Omega$ et $\omega = 314\ rad.s^{-1}$.

4) On insère dans le circuit précédent une bobine idéale d'inductance $L = 0{,}1\ H$. Calculer la puissance moyenne $\mathcal{P}'(R)$ dissipée dans le résistor.

Montrer que quelque soit R, le rapport $\dfrac{\mathcal{P}'(R)}{\mathcal{P}(R)}$ est inférieur à 1.

Calculer la valeur R'_m pour laquelle $\mathcal{P}'(R)$ est maximale.

• L'intensité est de la forme $i(t) = I_0\sqrt{2}\sin(\omega t + \varphi_i)$ en introduisant I_0 l'intensité efficace et φ_i le déphasage de $i(t)$ par rapport à $e(t)$.

• En notation complexe :

$\underline{e} = \underline{E}e^{j\omega t}$, avec $\underline{E} = E_0\sqrt{2}$

et $\underline{i} = \underline{I}e^{j\omega t}$, avec $\underline{I} = I_0\sqrt{2}e^{j\varphi_i}$

• Pour un dipôle de résistance R et de réactance X, étudié **en convention récepteur**, soumis à la tension $u(t)$ d'amplitude complexe $\underline{U}$ et parcouru par l'intensité $i(t)$ d'amplitude complexe $\underline{I}$, on a :

$\underline{Z} = R + jX = \dfrac{\underline{E}}{\underline{I}} = \dfrac{E_0}{I_0}e^{j(\varphi_u - \varphi_i)} = Ze^{j\varphi}$,

avec $Z = \sqrt{R^2 + X^2} = \dfrac{U_m}{I_m} = \dfrac{U_{eff}}{I_{eff}}$.

1) La loi des mailles donne $\underline{I} = \dfrac{\underline{E}}{\underline{Z}} = \dfrac{\underline{E}}{R_0 + R + jX}$, soit $\boxed{I_0 = \dfrac{E_0}{\sqrt{(R+R_0)^2 + X^2}}}$

2)

$$\begin{aligned}\mathcal{P} \equiv < u(t)i(t) > &= \frac{1}{T}\int_0^T 2E_0I_0\sin(\omega t)\sin(\omega t + \psi)\mathrm{d}t \\ &= 2E_0I_0 < \frac{1}{2}(\cos(-\varphi_i) - \cos(2\omega t + \varphi_i)) >= E_0I_0\cos\varphi\end{aligned}$$

Or, $\cos\varphi = \dfrac{\mathcal{R}_e(\underline{Z})}{Z} = \dfrac{R}{Z}$ d'où, comme $E_0 = ZI_0$: $\boxed{\mathcal{P} = RI_0^2 = \dfrac{RE_0^2}{(R+R_0)^2 + X^2}}$.

D'après la question **1)** , on remarque que $\mathcal{P}$ dépend non seulement de R mais aussi de X (par l'intermédiaire de l'intensité efficace qui dépend aussi à la fois de R et de X).

3) Lorsque $X = 0$, on obtient : $\mathcal{P}(R) = RI_0^2 = \dfrac{RE_0^2}{(R+R_0)^2}$.

La puissance est maximale si : $\dfrac{\mathrm{d}\mathcal{P}}{\mathrm{d}R} = 0$.

Or : $\dfrac{\mathrm{d}\mathcal{P}}{\mathrm{d}R} = \dfrac{E_0^2}{(R+R_0)^2} - \dfrac{2RE_0^2}{(R+R_0)^3} = \dfrac{(R_0 - R)E^2}{(R+R_0)^3}$.

Donc, la puissance fournie au dipôle par le générateur est maximale lorsque $\boxed{R = R_m = R_0 = 10\ \Omega}$. Alors : $\boxed{\mathcal{P} = \mathcal{P}(max) = \dfrac{E^2}{4R_0} = 1\,210\ W}$.

4) L'expression littérale de la puissance reste la même ($\mathcal{P}' = RI_0^2$) mais l'expression de l'intensité efficace est différente : $I_0 = \dfrac{E_0}{\sqrt{(R+R_0)^2 + L^2\omega^2}}$.

La puissance dissipée dans le résistor est donc : $\mathcal{P}' = \dfrac{RE_0^2}{(R+R_0)^2 + L^2\omega^2}$.

On a donc : $\boxed{\dfrac{\mathcal{P}'}{\mathcal{P}} = \dfrac{(R+R_0)^2}{(R+R_0)^2 + L^2\omega^2} < 1}$

Sur l'intervalle $R \in [0, +\infty[$, on a $\mathcal{P}' > 0$, $\mathcal{P}'(0) = 0$ et $\mathcal{P}'(R \to \infty) = 0$:
$\hookrightarrow$ donc la puissance $\mathcal{P}'$ passe par un maximum pour $\dfrac{\mathrm{d}\mathcal{P}'}{\mathrm{d}R}(R'_m) = 0$. Or :

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\mathcal{P}'}{\mathrm{d}R} &= \frac{E_0^2}{(R+R_0)^2 + L^2\omega^2} - \frac{2(R+R_0)RE_0^2}{((R+R_0)^2 + L^2\omega^2)^2} \\ &= E^2 \frac{(R+R_0)^2 + L^2\omega^2 - 2(R+R_0)R}{((R+R_0)^2 + L^2\omega^2)^2}\end{aligned}$$

Alors $\dfrac{\mathrm{d}\mathcal{P}'}{\mathrm{d}R} = 0 \leftrightarrow R^2 = R_0^2 + L^2\omega^2 \leftrightarrow \boxed{R'_m = \sqrt{R_0^2 + L^2\omega^2} = 33\ \Omega}$.

EXTD6.2 **Caractéristiques d'un circuit oscillant** (Dervieux/Simon [Ellipses])

Le circuit oscillant de la figure ci-contre dissipe une puissance (moyenne) de $\mathcal{P} = 40\ kW$. La tension efficace à ses bornes est de $U = 12\ kV$ et la fréquence est $f = 480\ kHz$.

1) Calculer numériquement la résistance équivalente R_e qui dissiperait la même puissance.

2) Exprimer l'admittance complexe $\underline{Y}$ du dipôle AB.

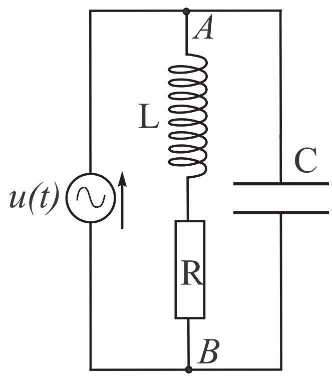
3) Comment doit être la partie imaginaire de $\underline{Y}$ lorsque le dipôle a un comportement purement résistif?

Exprimer R_e en fonction de R, L et C lorsque la fréquence est telle que l'admittance complexe $\underline{Y}$ est purement résistive.

4) Le cœfficient de surtension du circuit oscillant est $Q = \dfrac{L\omega}{R}$.

Exprimer C et L en fonction de R_e, Q et f.

Calculer L et C pour $Q = 16$.



1) Comme on l'a rappelé à l'exercice précédent (**EXTD6.1**), la puissance reçue par un dipôle AB d'impédance $\underline{Z}$ parcouru par l'intensité efficace I et soumis à la tension efficace U est : $\mathcal{P} = \mathcal{R}_e(\underline{Z})I^2 = \dfrac{U^2}{\mathcal{R}_e(\underline{Z})}$.

Si le dipôle se comporte comme une résistance R_e, alors $\underline{Z} = \mathcal{R}_e(\underline{Z}) = R_e$ et $\mathcal{P} = \dfrac{U^2}{R_e} \Leftrightarrow \boxed{R_e = \dfrac{U^2}{\mathcal{P}} = 3{,}6.10^3\ \Omega}$.

2) L'admittance du dipôle AB constitué de deux branches en parallèle est : $\boxed{\underline{Y} = \dfrac{1}{R + jL\omega} + jC\omega}$.

Cette admittance s'écrit, sous la forme cartésienne suivante :

$$\underline{Y} = \frac{R - jL\omega}{R^2 + L^2\omega^2} + jC\omega \longrightarrow \boxed{\underline{Y} = \frac{R}{R^2 + L^2\omega^2} + j\left(C\omega - \frac{L\omega}{R^2 + L^2\omega^2}\right)}.$$

3) • Si l'admittance est purement résistive, alors

$$\underline{Y} = \frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_e} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{R}{R^2 + L^2\omega^2} = \dfrac{1}{R_e} \\ C\omega - \dfrac{L\omega}{R^2 + L^2\omega^2} = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} R_e = R + \dfrac{L^2\omega^2}{R} & ① \\ C = \dfrac{L}{R^2 + L^2\omega^2} & ② \end{cases}$$

• ② $\rightarrow \dfrac{L^2\omega^2}{R} = \dfrac{L}{RC} - R \xrightarrow{①} \boxed{R_e = \dfrac{L}{RC}}$ ③.

4) $Q \equiv \dfrac{L\omega}{R} \xrightarrow{③} \boxed{Q = R_e C\omega}$ ④.

④ $\rightarrow \boxed{C = \dfrac{Q}{2\pi f R_e} = 1{,}47\ nF}$.

① $\xrightarrow{Q \equiv \frac{L\omega}{R}} \boxed{R_e = R(1 + Q^2)}$ ⑤

$Q \equiv \dfrac{L\omega}{R} \Leftrightarrow L = \dfrac{RQ}{\omega} \xrightarrow{⑤} \boxed{L = \dfrac{R_e Q}{2\pi f(1 + Q^2)} = 74{,}3\ \mu H}$.