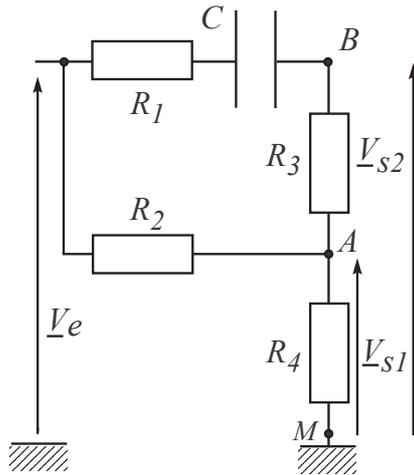


TD7/8 – Electrocinétique : Filtres



EXTD7/8.1 Filtre : On considère le filtre suivant (tension de sortie v_{s1}) :



1) Prévoir le comportement haute et basse fréquence de ce filtre. De quelle famille de filtre est-il voisin ?

- ① Filtre passe-bas
- ② Filtre passe-haut
- ③ Filtre passe-bande
- ④ Filtre réjecteur de bande.

2) On exprime la fonction de transfert

$$\underline{H}_1(j\omega) = \frac{V_{s1}}{V_e} \text{ sous la forme : } \underline{H}_1(j\omega) = \frac{1 + j\tau_1\omega}{a + j\tau_2\omega}$$

L'expression de a est :

- ① $a = 1 + \frac{R_4}{R_2}$
- ② $a = 1 + \frac{R_3}{R_1}$
- ③ $a = \frac{R_1 + R_2 + R_3}{R_4}$
- ④ $a = 1 + \frac{R_2}{R_4}$

3) L'expression de τ_1 est :

- ① $\tau_1 = (R_1 + R_2 + R_3) C$
- ② $\tau_1 = (R_1 + R_2 + R_3 + R_4) C$
- ③ $\tau_1 = (R_2 + R_4) C$
- ④ $\tau_1 = (R_1 + R_2) C$

4) L'expression de τ_2 est :

- ① $\tau_2 = R_3 C$
- ② $\tau_2 = \frac{R_2 (R_1 + R_3)}{R_1 + R_2 + R_3} C$
- ③ $\tau_2 = \left(R_1 + R_2 + R_3 + \frac{(R_1 + R_3) R_2}{R_4} \right) C$
- ④ $\tau_2 = \frac{R_2 (R_1 + R_3)}{R_1 + R_2 + R_3} + R_4 C$

5) Dans toute la suite de l'exercice, on fera l'hypothèse que $\tau_1 \gg \frac{\tau_2}{a}$. Le gain en décibel du filtre sera noté $G_{dB}(\omega)$ et φ le déphasage entre la tension de sortie et la tension d'entrée.

Donner une valeur (ou une expression) approchée du gain en décibel et du déphasage dans l'intervalle de pulsation $\omega \ll \frac{1}{\tau_1} \ll \frac{a}{\tau_2}$:

- ① $G_{dB}(\omega) \approx 0$ et $\varphi \approx 0$
- ② $G_{dB}(\omega) \approx -20 \log(a)$ et $\varphi \approx \frac{\pi}{2}$
- ③ $G_{dB}(\omega) \approx -20 \log(a)$ et $\varphi \approx 0$
- ④ $G_{dB}(\omega) \approx 20 \log(a)$ et $\varphi \approx -\pi$

6) Donner une valeur (ou une expression) approchée du gain en décibel et du déphasage dans l'intervalle de pulsation $\frac{1}{\tau_1} \ll \omega \ll \frac{a}{\tau_2}$:

- ① $G_{dB}(\omega) \approx 0$ et $\varphi \approx 0$
- ② $G_{dB}(\omega) \approx 20 \log(\omega\tau_1) - 20 \log(a)$ et $\varphi \approx \frac{\pi}{2}$
- ③ $G_{dB}(\omega) \approx 20 \log(\omega\tau_2) + 20 \log(a)$ et $\varphi \approx \frac{\pi}{2}$
- ④ $G_{dB}(\omega) \approx 20 \log(\omega\tau_1) - 20 \log(a)$ et $\varphi \approx 0$

7) Donner une valeur (ou une expression) approchée du gain en décibel et du déphasage dans l'intervalle de pulsation $\frac{1}{\tau_1} \ll \frac{a}{\tau_2} \ll \omega$:

- ① $G_{dB}(\omega) \approx -20 \log \frac{\tau_2}{\tau_1}$ et $\varphi \approx 0$
- ② $G_{dB}(\omega) \approx -20 \log(a)$ et $\varphi \approx 0$
- ③ $G_{dB}(\omega) \approx -20 \log(\omega\tau_2)$ et $\varphi \approx 0$
- ④ $G_{dB}(\omega) \approx -20 \log(\omega\tau_2)$ et $\varphi \approx -\pi$

8) Exprimer la relation entre la fonction de transfert $\underline{H}_2(j\omega) = \frac{V_{s2}}{V_e}$ et $\underline{H}_1(j\omega)$ en fonction des valeurs des éléments du circuit.

- ① $\underline{H}_1(j\omega) = \frac{R_2 R_4 \underline{H}_2(j\omega) + R_1 R_3}{R_2 R_4 + R_3 R_4 + R_2 R_3 + R_1 R_4}$
- ② $\underline{H}_1(j\omega) = \underline{H}_2(j\omega)$
- ③ $\underline{H}_1(j\omega) = \frac{R_3}{R_4 + R_3} \underline{H}_2(j\omega)$
- ④ $\underline{H}_1(j\omega) = \frac{R_2 R_4 \underline{H}_2(j\omega) + R_3 R_4}{R_2 R_4 + R_3 R_4 + R_2 R_3}$

EXTD7/8.2 Filtre à structure de RAUCH

On réalise un filtre à l'aide du montage suivant. L'amplificateur opérationnel est supposé idéal et en régime linéaire.

1) En déterminant la tension de sortie du filtre à basses et hautes fréquences, déterminer la nature de ce filtre.

2) En utilisant le théorème de MILLMAN en A et B, établir l'expression de la fonction de transfert \underline{H} du montage que l'on mettra sous la forme : $\underline{H} = \frac{H_0}{1 + 2m \frac{j\omega}{\omega_0} + \left(\frac{j\omega}{\omega_0}\right)^2}$

en déterminant H_0 ainsi que les expressions de ω_0 et m en fonction de R , C_1 et C_2 .

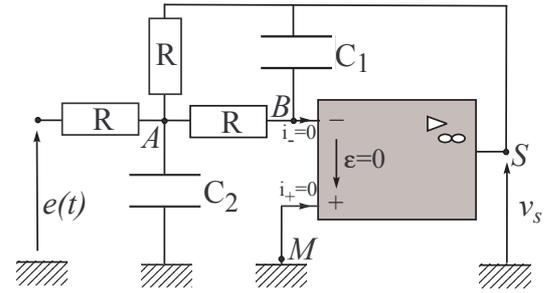
On souhaite obtenir une fréquence $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = 5 \text{ Hz}$ et un facteur d'amortissement $m = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

On choisit $R = 470 \Omega$.

3) Calculer les valeurs des capacités C_1 et C_2 .

4) Pour les valeurs numériques précédentes, tracer le diagramme de BODE asymptotique (gain et phase) ainsi que l'allure des courbes réelles.

On utilisera comme variable la pulsation réduite $x = \frac{\omega}{\omega_0}$.



EXTD7/8.3 Filtre actif (Ecole de l'Air 2004)

Le montage amplificateur ci-contre comporte un amplificateur opérationnel idéal idéal en régime linéaire. La tension $e(t)$ est sinusoïdale. On utilisera la notation complexe.

1) Exprimer l'amplitude complexe du potentiel V_B en fonction de celle du potentiel en S.

2) Exprimer l'amplitude complexe du potentiel V_A en A en fonction de celles des potentiel en E et S, des admittances $\underline{Y}_i = \frac{1}{\underline{Z}_i}$ et de α .

3) En déduire la fonction de transfert $\underline{H} = \frac{V_S}{\underline{E}}$ (où \underline{E} est l'amplitude complexe de la force électromotrice $e(t)$ et V_S celle de la tension de sortie v_s) en fonction des admittances \underline{Y}_i et de α .

4) On pose $\underline{Y}_1 = \underline{Y}_3 = \frac{1}{R}$ et $\underline{Y}_2 = \underline{Y}_4 = jC\omega$.

Montrer que \underline{H} peut s'écrire sous la forme :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{A}{1 + 2jm \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}$$

Donner les expressions de A, m et ω_0 .

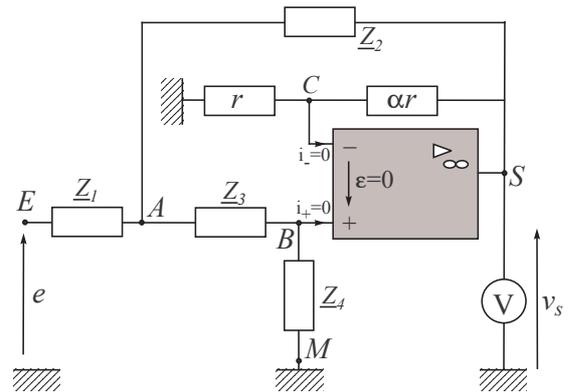
Réponse partielle :

$$\underline{H} = \frac{V_S}{\underline{E}} = \frac{\underline{Y}_1}{\left((\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3) \frac{\underline{Y}_3 + \underline{Y}_4}{\underline{Y}_3} - \underline{Y}_3 \right) \frac{1}{1 + \alpha} - \underline{Y}_2}$$

5) À quelle condition a-t-on amplification du signal?

6) Tracer l'allure du diagramme de BODE (pour le gain) des trois courbes correspondant aux cas suivants :

$m = 0,1$, $m = 0,707$ et $m = 1$.



EXTD7/8.1 1) ②; 2) ④; 3) ①; 4) ③; 5) ③; 6) ②; 7) ①; 8) ④: Appliquer MILLMAN en A.

EXTD7/8.2 **Filtre à structure de RAUCH** (d'après Morellet/Grossart, p. 258)

On réalise un filtre à l'aide du montage suivant. L'amplificateur opérationnel est supposé idéal et en régime linéaire.

1) En déterminant la tension de sortie du filtre à basses et hautes fréquences, déterminer la nature de ce filtre.

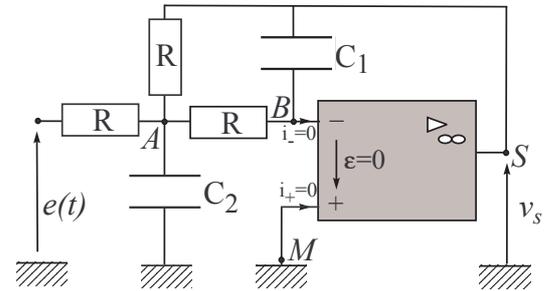
2) En utilisant le théorème de MILLMAN en A et B, établir l'expression de la fonction de transfert \underline{H} du montage que l'on mettra sous la forme : $\underline{H} = \frac{H_0}{1 + 2m \frac{j\omega}{\omega_0} + \left(\frac{j\omega}{\omega_0}\right)^2}$

en déterminant H_0 ainsi que les expressions de ω_0 et m en fonction de R , C_1 et C_2 .

On souhaite obtenir une fréquence $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = 5 \text{ Hz}$ et un facteur d'amortissement $m = \frac{1}{\sqrt{2}}$. On choisit $R = 470 \Omega$.

3) Calculer les valeurs des capacités C_1 et C_2 .

4) Pour les valeurs numériques précédentes, tracer le diagramme de BODE asymptotique (gain et phase) ainsi que l'allure des courbes réelles. On utilisera comme variable la pulsation réduite $x = \frac{\omega}{\omega_0}$.



1) • Puisqu'un condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert à basses fréquences ($\frac{1}{C\omega} \rightarrow \infty$ si $\omega \rightarrow 0$), alors $V_A = V_B$ car parcourue par $i_- = 0$.

Comme B est une masse virtuelle (pour un AO idéal : $V_B = V_{E-} = V_{E+} = V_M = 0$), on en déduit que $V_A = 0$.

La loi des nœuds en termes de potentiels en A donne : $\frac{\underline{E} - \underline{V}_A}{R} + \frac{\underline{V}_S - \underline{V}_A}{R} + \frac{\underline{V}_B - \underline{V}_A}{R} + 0 = 0$, d'où : $\underline{V}_S = -\underline{E} \Leftrightarrow \boxed{v_s(t) = -e(t) \Leftrightarrow \underline{H}(\omega = 0) = -1}$.

• Puisqu'un condensateur se comporte comme un interrupteur fermé à hautes fréquences ($\frac{1}{C\omega} \rightarrow 0$ si $\omega \rightarrow \infty$), on a $\boxed{v_s(t) = u_{BM} = 0 \Leftrightarrow \underline{H}(\omega \rightarrow \infty) = 0}$.

• **C1**: Le filtre se comporte comme un **filtre passe-bas**.

2) • Le théorème de MILLMAN appliqué au nœud A donne :

$$\underline{V}_A = \frac{\frac{\underline{E}}{R} + \frac{\underline{V}_B}{R} + \frac{\underline{V}_S}{R} + jC_2\omega \underline{V}_M}{\frac{3}{R} + jC_2\omega} \Rightarrow \underline{V}_A = \frac{\underline{E} + \underline{V}_B + \underline{V}_S}{3 + jRC_2\omega} \quad \textcircled{1}$$

• Le théorème de MILLMAN appliqué au nœud B donne :

$$\underline{V}_B = \frac{\frac{\underline{V}_A}{R} + jC_1\omega \underline{V}_S + 0}{\frac{1}{R} + jC_1\omega} \Rightarrow \underline{V}_B = \frac{\underline{V}_A + jRC_1\omega \underline{V}_S}{1 + jRC_1\omega} \quad \textcircled{2}$$

• Comme B est une masse virtuelle (cf 1)), on a $\underline{V}_B = 0$ et ① et ② conduisent à la relation :

$$\frac{\underline{E} + \underline{V}_S}{3 + jRC_2\omega} + jRC_1\omega \underline{V}_S = 0 \Leftrightarrow \underline{E} + \underline{V}_S + (3 + jRC_1\omega)jRC_1\omega \underline{V}_S = 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\underline{H} = \frac{\underline{V}_S}{\underline{E}} = \frac{-1}{1 + 3RC_1(j\omega) + R^2C_1C_2(j\omega)^2}} \quad (*)$$

• Par comparaison avec la forme canonique d'un filtre passe-bas d'ordre 2, on obtient :

$$\underline{H} = \frac{H_0}{1 + 2m \frac{j\omega}{\omega_0} + \left(\frac{j\omega}{\omega_0}\right)^2} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \boxed{H_0 = -1} \\ \boxed{\omega_0 = \frac{1}{R\sqrt{C_1C_2}}} \end{array} \right. \quad \boxed{m = \frac{3}{2}RC_1\omega_0 = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{C_1}{C_2}}}$$

3) • De ce qui précède on tire deux relations liant C_1 et C_2 :

$$\omega_0 = \frac{1}{R\sqrt{C_1 C_2}} \Leftrightarrow C_1 C_2 = \frac{1}{R^2 \omega_0^2} \text{ ③ } \quad \text{et} \quad m = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{C_1}{C_2}} \Leftrightarrow \frac{C_1}{C_2} = \frac{4}{9} m^2 \text{ ④}$$

• On en tire : $C_1 = \frac{m}{3R\pi f_0} = 32 \mu F$ et $C_2 = \frac{9}{4m^2} C_1 = \frac{3}{4mR\pi f_0} = 144 \mu F$

4) • La fonction de transfert peut s'écrire :

$$\underline{H} = \frac{H_0}{1 - x^2 + j2mx} = \frac{j}{2mx + j(x^2 - 1)} = He^{j\varphi} \text{ en posant } x = \frac{\omega}{\omega_0}$$

• On en déduit : $H = \frac{1}{\sqrt{(x^2 - 1)^2 + 4m^2 x^2}}$ et $\varphi = \frac{\pi}{2} - \arctan \left[\frac{1}{2m} \left(x - \frac{1}{x} \right) \right]$

car $\varphi = \arg \underline{H} = \arg j - \arg [2mx + j(x^2 - 1)] = \frac{\pi}{2} - \arctan \left(\frac{x^2 - 1}{2mx} \right)$

• La gain en décibels est : $G_{dB}(\omega) = 20 \log H = -10 \log [(x^2 - 1)^2 + 4m^2 x^2]$

• Asymptote basses fréquences : pour $\omega \ll \omega_0 \Leftrightarrow x \ll 1$, on a :

$G_{dB} \rightarrow G_{dB}(ABF) = 0 \text{ dB}$ et $\varphi \rightarrow \varphi(0) = \pi$

On en déduit que pour $x \ll 1$, la courbe de réponse en gain en décibels présente une asymptote horizontale de valeur 0 dB et que la courbe de réponse en phase présente une asymptote horizontale de valeur 180°.

• Asymptote hautes fréquences : pour $\omega \gg \omega_0 \Leftrightarrow x \gg 1$, on a :

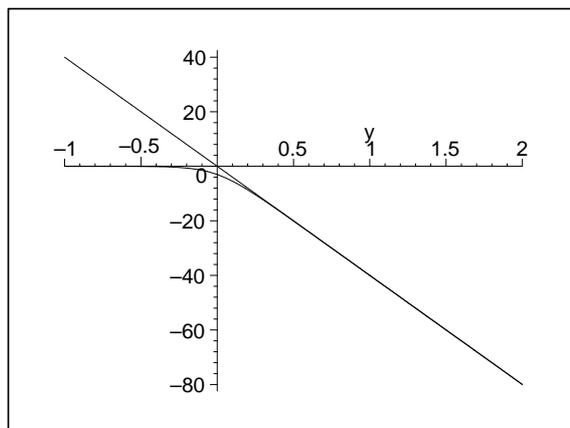
$G_{dB} \rightarrow G_{dB}(AHF) = -40 \log x \text{ dB}$ et $\varphi \rightarrow \varphi(\infty) = 0$

On en déduit que pour $x \gg 1$, la courbe de réponse en gain en décibels présente une asymptote de pente -40 dB/dc passant par l'origine et que la courbe de réponse en phase présente une asymptote horizontale de valeur 0°.

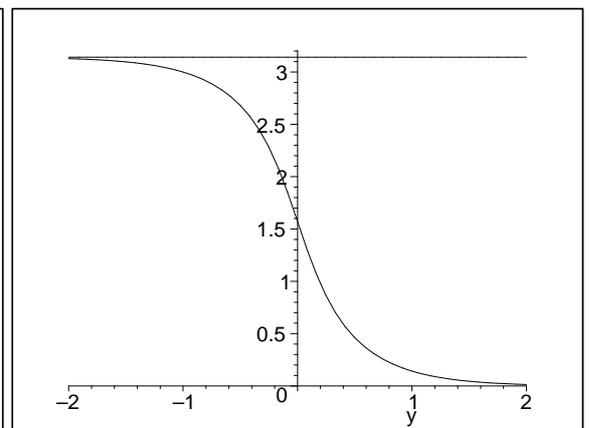
• Pour $\omega = \omega_0 \Leftrightarrow x = 1$, on a $\underline{H} = \frac{-jH_0}{2m} = j \frac{1}{\sqrt{2}}$.

D'où $G_{dB}(\omega_0) = 20 \log \frac{1}{\sqrt{2}} = -3,0 \text{ dB}$ et $\varphi = 90^\circ$.

Rque : le fait que $G_{dB}(\omega_0) - G_{dB}(max) = -3,0 \text{ dB}$ indique que ω_0 représente la pulsation de coupure du filtre.



(a) $G_{dB}(\log(x))$



(b) $\varphi(\log(x))$

EXTD7/8.3 Filtre actif (Ecole de l'Air 2004)

Le montage amplificateur ci-contre comporte un amplificateur opérationnel idéal idéal en régime linéaire. La tension $e(t)$ est sinusoïdale. On utilisera la notation complexe.

1) Exprimer l'amplitude complexe du potentiel V_B en fonction de celle du potentiel en S .

2) Exprimer l'amplitude complexe du potentiel V_A en fonction de celles des potentiel en E et S , des admittances $\underline{Y}_i = \frac{1}{\underline{Z}_i}$ et de α .

3) En déduire la fonction de transfert $\underline{H} = \frac{\underline{V}_S}{\underline{E}}$ (où \underline{E} est l'amplitude complexe de la force électromotrice $e(t)$ et \underline{V}_S celle de la tension de sortie v_s) en fonction des admittances \underline{Y}_i et de α .

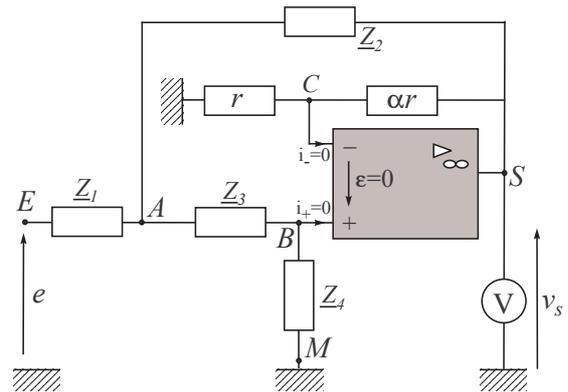
4) On pose $\underline{Y}_1 = \underline{Y}_3 = \frac{1}{R}$ et $\underline{Y}_2 = \underline{Y}_4 = jC\omega$.

Montrer que \underline{H} peut s'écrire sous la forme :
$$\underline{H}(j\omega) = \frac{A}{1 + 2jm\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}$$

Donner les expressions de A , m et ω_0 .

5) À quelle condition a-t-on amplification du signal?

6) Tracer l'allure du diagramme de BODE (pour le gain) des trois courbes correspondant aux cas suivants : $m = 0,1$, $m = 0,707$ et $m = 1$.



1) Pour un A.O. idéal en régime linéaire, $\underline{V}_B = \underline{V}_+ = \underline{V}_- = \underline{V}_C$. Alors, la Loi des nœuds en termes de potentiels en C donne :

$$\frac{\underline{V}_M - \underline{V}_C}{r} + \frac{\underline{V}_S - \underline{V}_C}{\alpha r} + 0 = 0$$

soit :
$$\underline{V}_B = \underline{V}_C = \frac{\underline{V}_S}{1 + \alpha} \quad \textcircled{1}$$

2) La LNTP appliquée au point A s'écrit :

$$\frac{\underline{E} - \underline{V}_A}{\underline{Z}_1} + \frac{\underline{V}_S - \underline{V}_A}{\underline{Z}_2} + \frac{\underline{V}_B - \underline{V}_A}{\underline{Z}_3} = 0 \Leftrightarrow (\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3) \underline{V}_A = \underline{Y}_1 \underline{E} + \underline{Y}_2 \underline{V}_S + \underline{Y}_3 \underline{V}_B$$

Soit, grâce à $\textcircled{1}$:

$$\underline{V}_A = \frac{\underline{Y}_1 \underline{E} + \left(\underline{Y}_2 + \frac{\underline{Y}_3}{1 + \alpha} \right) \underline{V}_S}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3} \quad \textcircled{2}$$

3) Comme $i_+ = 0$, la LNTP appliquée en B s'écrit :

$$\frac{\underline{V}_A - \underline{V}_B}{\underline{Z}_3} + \frac{\underline{V}_M - \underline{V}_B}{\underline{Z}_4} + 0 = 0 \Leftrightarrow \underline{V}_A = \frac{\underline{Y}_3 + \underline{Y}_4}{\underline{Y}_3} \underline{V}_B \xrightarrow{\textcircled{1}} \underline{V}_A = \frac{\underline{Y}_3 + \underline{Y}_4}{\underline{Y}_3} \frac{\underline{V}_S}{1 + \alpha} \quad \textcircled{3}$$

$$\textcircled{2} \xrightarrow{\textcircled{3}} \frac{\underline{Y}_3 + \underline{Y}_4}{\underline{Y}_3} \frac{\underline{V}_S}{1 + \alpha} = \frac{\underline{Y}_1 \underline{E} + \left(\underline{Y}_2 + \frac{\underline{Y}_3}{1 + \alpha} \right) \underline{V}_S}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3}$$

$$\Leftrightarrow \underline{H} = \frac{\underline{V}_S}{\underline{E}} = \frac{\underline{Y}_1}{\left((\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3) \frac{\underline{Y}_3 + \underline{Y}_4}{\underline{Y}_3} - \underline{Y}_3 \right) \frac{1}{1 + \alpha} - \underline{Y}_2} \quad \textcircled{4}$$

4) En utilisant $\underline{Y}_1 = \underline{Y}_3 = \frac{1}{R}$ et $\underline{Y}_2 = \underline{Y}_4 = jC\omega$, la fonction de transfert devient :

$$\underline{H} = \frac{\underline{V}_S}{\underline{E}} = \frac{1 + \alpha}{1 + j(2 - \alpha)RC\omega - R^2C^2\omega^2}$$

qu'on peut écrire sous la forme :
$$\underline{H}(j\omega) = \frac{A}{1 + 2jm\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}} \quad \textcircled{5}$$

en posant $A = 1 + \alpha$, $m = 1 - \frac{\alpha}{2}$ et $\omega_0 = \frac{1}{RC}$.

5) La forme canonique de la fonction de transfert est celle d'un **filtre passe-bas**.
 Mais un filtre passe-bas donc le facteur d'amortissement est paramétré par la valeur de α qui, sur un certain intervalle, permet au module $H(\omega)$ de la fonction de transfert de passer par un maximum.

En effet $H(\omega) = |\underline{H}(j\omega)| = \frac{A}{\sqrt{(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2})^2 + 4m^2\frac{\omega^2}{\omega_0^2}}} = \frac{A}{\sqrt{f(X)}}$,

en posant $f(X) \equiv (1 - X)^2 + 4m^2X = X^2 + 2(2m^2 - 1)X + 1$ et $X \equiv \frac{\omega^2}{\omega_0^2}$.

$H(\omega)$ passe par un maximum (H_{max}) lorsque $f(X)$ passe par un minimum, c'est-à-dire lorsque, pour $w = w_m$:

$\frac{df}{dX}(X_m) = 2X_m + 2(2m^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow X_m = 1 - 2m^2 > 0$

$\Leftrightarrow \omega_m = \omega_0 \sqrt{1 - 2m^2} < \omega_0$ avec : $0 < m < \frac{1}{\sqrt{2}}$

Dans ce cas ($m < \frac{1}{\sqrt{2}}$), le filtre se comporte comme un amplificateur de tension.

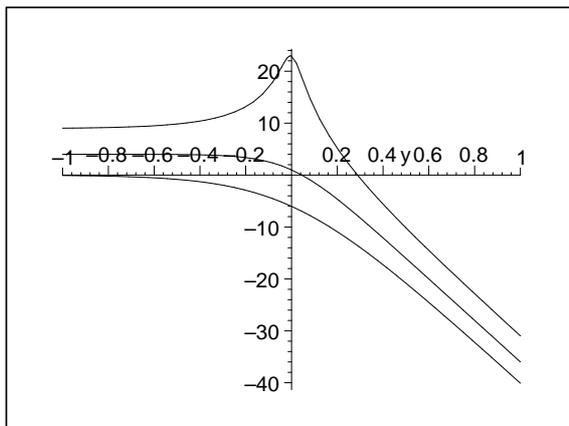
6) • La courbe de réponse en gain revient à tracer l'évolution du gain en décibels : $G_{dB} = 20 \log H$ en fonction de $\log x = \log \frac{\omega}{\omega_0}$:

$G_{dB} = 20 \log A - 10 \log((1 - x^2)^2 + 4m^2x^2)$

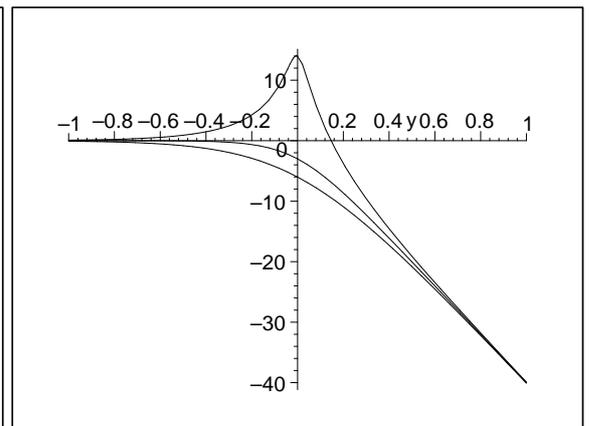
• Les asymptotes à basses fréquences et à hautes fréquences à cette courbes de réponses en gain ont les équations suivantes :

$\omega \ll \omega_0 \quad G_{dB} \rightarrow G_{dB}(ABF) = 20 \log A$: droite horizontale passant par $(0, 20 \log A)$.

$\omega \gg \omega_0 \quad G_{dB} \rightarrow G_{dB}(ABF) = 20 \log A - 40 \log x$: droite de pente -40 dB/dec passant par $(0, 20 \log A)$.



(c) G_{dB} pour $m = 0,1$, $m = 0,707$ et $m = 1$



(d) $G_{dB} - 20 \log A$ pour $m = 0,1$, $m = 0,707$ et $m = 1$