TD9 – Mécanique : Forces centrales

$\boxed{\textbf{EXTD9.1}}$ **Modèle atomique de THOMSON** (d'après Pullicino, Nathan, p. 224)
En 1904, le physicien anglais Joseph John THOMSON *proposa de présenter l'atome d'hydrogène par un nuage sphérique de centre O, de rayon R et de charge $+e$ uniformément répartie. À l'intérieur de cette sphère, fixe dans le référentiel du laboratoire, se déplace librement un électron de masse m ponctuelle et de charge $-e$.*
Le référentiel du laboratoire $\mathcal{R}_g(O,\overrightarrow{e_x},\overrightarrow{e_y},\overrightarrow{e_z})$ est assimilé un référentiel galiléen.
En l'absence de toute action extérieure, l'électron M est soumis à une unique force d'origine électrostatique qui tend à attirer vers le point O : $\overrightarrow{F} = -k\overrightarrow{OM}$ avec $k = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{e^2}{R^3}$.
Cette force se comporte comme une force de rappel élastique due à un ressort de raideur k et de longueur à vide nulle, dont l'autre extrémité serait fixée en O.
À l'instant $t = 0$, une perturbation écarte légèrement l'électron de sa position d'équilibre avec les conditions initiales : $\overrightarrow{OM}(t=0) = \overrightarrow{OM_0} = r_0\overrightarrow{e_x}$ et $\overrightarrow{v}(t=O) = \overrightarrow{v_0} = v_0\overrightarrow{e_y}$.

Données : $m = 9{,}11.10^{-31}\ kg$; $e = 1{,}6.10^{-19}\ C$; $\dfrac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9.10^9\ uSI$

Vitesse de la lumière dans le vide : $c = 3.10^8\ m.s^{-1}$.

Equation d'une ellipse en coordonnées cartésiennes avec origine en O, d'axes de symétrie Ox et Oy : $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

1) Montrer qu'il y a conservation du moment cinétique en O de l'électron et déterminer sa valeur en fonction de r_0, v_0 et m.

En déduire que son mouvement reste confiné dans le plan (Oxy).

La position de M est donc repérée dans les bases $(\overrightarrow{e_x},\overrightarrow{e_y})$ et $(\overrightarrow{e_r},\overrightarrow{e_\theta})$ avec comme vecteurs positions respectifs :
$\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{e_x} + y\overrightarrow{e_y}$ et $\overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{e_r}$ (pour $r = \sqrt{x^2+y^2} \leq R$).

2) Exprimer la pulsation ω_0 du mouvement de M en fonction de ϵ_0, e, m et R. Calculer la valeur de R pour laquelle la pulsation ω_0 correspond à la fréquence ν_0 d'une des raies du spectre de LYMAN de l'atome d'hydrogène ($\lambda_0 = 121{,}8\ nm$).

3) Déterminer les expressions de $x(t)$ et $y(t)$. Montrer que la trajectoire du point M est une ellipse (ellipse de HOOKE) dont vous préciserez les longueurs a et b des demi axes.

4) À quelles condition cette trajectoire est-elle circulaire? Que se passe-t-il si $v_0 = 0$?

5) L'électron accéléré perd de l'énergie par rayonnement. Pour tenir compte de ce phénomène, une force supplémentaire de freinage est introduite. Elle a la forme d'une force de frottement de type visqueux : $\overrightarrow{f} = -h\overrightarrow{v}$, où h, cœfficient de freinage, est positif.

Quelle est l'évolution du moment cinétique en O de l'électron au cours du temps?

Dire qualitativement ce que sera le mouvement de l'électron pour de faibles amortissements.

Commenter quant à la stabilité de l'atome.

EXTD9.2 **Quantification du moment cinétique : l'atome de Bohr** (Pullicino, Nathan, p. 257)

En 1913, le physicien danois Niels Bohr *imagine un modèle «planétaire» de l'atome afin d'expliquer les raies émises par des atomes d'hydrogène excités. Ce modèle, aujourd'hui obsolète, ne permit pas d'expliquer les spectres des autres atomes. Une nouvelle physique fut nécessaire : la physique quantique.*

Dans le modèle de Bohr, l'atome d'hydrogène est un système à deux corps ponctuels constitué d'un noyau, le proton de masse m_p et charge électrique $+e$, et d'un électron M, de masse m_e et de charge $-e$.

La masse du proton étant près de 2 000 fois celle de l'électron, le proton est considéré comme fixe dans le référentiel d'étude supposé galiléen $\mathcal{R}_g(O,\overrightarrow{e_x},\overrightarrow{e_y},\overrightarrow{e_z})$ – où l'origine O correspond au noyau de l'atome.

Données : $h = 6{,}626.10^{-34}\ J.s$; $\epsilon_0 = 8{,}84.10^{-12}\ C^2.N^{-1}.m^{-2}$;
$c = 3.10^8\ m.s^{-1}$; $m_e = 9{,}1.10^{-31}\ kg$; $e = 1{,}6.10^{-19}\ C$.

• **Premier postulat de Bohr :** L'électron se déplace uniquement sur certaines orbites circulaires appelés **états stationnaires**.
Ce mouvement peut être décrit par la physique classique.
D'après Bohr, l'électron a un mouvement circulaire de rayon r et de vitesse v autour de O.
Le champ de pesanteur est négligeable à l'échelle atomique et l'électron n'est soumis qu'à la force d'interaction électrostatique : $\overrightarrow{F} = -\dfrac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}\overrightarrow{e_r}$.

1) Montrer que le mouvement circulaire de l'électron autour du noyau est uniforme et exprimer v^2 en fonction de r, e, m_e et ϵ_0.

2) Exprimer l'énergie cinétique $\mathcal{E}_k(r)$, l'énergie potentielle d'interaction électrostatique $\mathcal{E}_p(r)$ et l'énergie (mécanique) $\mathcal{E}(r)$ de l'électron : $\mathcal{E}(r) = \mathcal{E}_k(r) + \mathcal{E}_p(r)$.

• **Deuxième postulat de Bohr d'après une idée de Planck :** L'électron accéléré par le proton ne peut pas rayonner de façon continue, mais doit attendre de passer d'une orbite permise n à une autre orbite d'énergie inférieure m pour émettre brutalement un **rayonnement sous la forme d'un photon** d'énergie : $h\nu_{n\to m} = \mathcal{E}_n - \mathcal{E}_m$ (avec $n > m$).
$\mathcal{E}_n$ et $\mathcal{E}_m$ sont les énergies des deux états n et m, h s'appelle la constante de Planck et $\nu_{n\to m}$ est la fréquence du rayonnement correspondant à la transition $n \to m$.

• Pour quantifier l'énergie de l'électron, Bohr ajouta un **troisième postulat** ou **condition de quantification** : les seules trajectoires circulaires permises sont celles pour lesquelles le moment cinétique orbital est un multiple entier de la constante de Planck réduite $\hbar$:

$$L_O(M) = n\hbar = n\frac{h}{2\pi}.$$

3) Déterminer la vitesse v de l'électron en fonction de r, m_e, h et du nombre quantique principal n (n entier ≥ 1).

4) Les trajectoires stables de l'électron sont des cercles de rayons r quantifiés par n tel que : $r = n^2 r_0$.
Calculer (en pm) le *rayon de* Bohr noté r_0.

5) En déduire l'énergie totale de l'électron quantifiée sous la forme : $\mathcal{E}_n = -\dfrac{\mathcal{E}_0}{n^2}$.

6) En supposant l'électron dans son état fondamental ($n = 1$), calculer sa vitesse v_0 et l'énergie d'ionisation de l'atome (l'exprimer en eV : $1\ eV = 1{,}6.10^{-19}\ J$).
L'électron est-il relativiste?

7) Déterminer l'expression littérale de la constante de Rydberg R_H relative à l'atome d'hydrogène et calculer sa valeur sachant que :

$$\frac{1}{\lambda_{n\to m}} = \frac{\nu_{n\to m}}{c} = R_H\left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right)$$ (avec $n > m$ et c la vitesse de la lumière dans le vide).

EXTD9.3 **Satellite géostationnaire** (Pullicino, Nathan, p. 250)

La Terre possède un seul stallite naturel : la Lune. De nombreux satellites artificiels sont par ailleurs placés en orbite autour de la Terre dans des buts variés tels que les télécommunications, la météorologie, la défense... Le mouvement des satellites artificiels de la Terre est étudié dans le référentiel géocentrique$\mathcal{R}_G$ supposé galiléen. Ce référentiel a pour origine le centre O de la Terre (supposée à symétrie sphérique) et ses axes sont orientés dans la direction de trois étoiles éloignées fixes. Dans le référentiel géocentrique, la Terre tourne autour de son axe avec une période de révolution T et une vitesse angulaire Ω.

On désignera par M_T et R_T respectivement la masse et le rayon de la Terre. $\mathcal{G}$ est la constante de gravitation universelle.

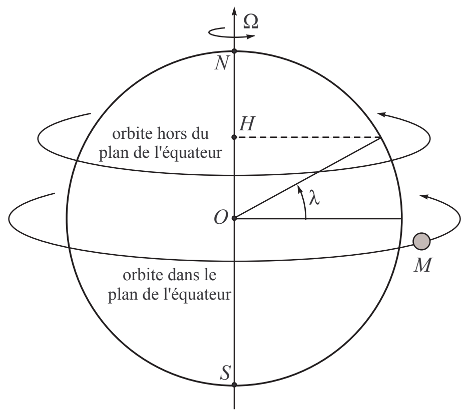
Données : $T = 86\,164\ s$; $M_T = 5{,}98.10^{24}\ kg$; $R_T = 6\,370\ km$; $\mathcal{G} = 6{,}67.10^{-11}\ N.m^2.kg^{-2}$.
Un satellite artificiel M de masse m est en orbite circulaire de rayon r autour de la Terre. Les frottements dus à l'atmosphère sur le satellite sont négligés.

1) Montrer qu'un satellite artificiel en orbite circulaire autour de la Terre a nécessairement une trajectoire plane contenant le centre O de la Terre.
2) Démontrer que le mouvement du satellite autour de la Terre est uniforme et exprimer littéralement sa vitesse v_0. On exprimera d'abord v_0 en fonction de $\mathcal{G}$, M_T et r, puis en fonction de g_0, R_T et r, où g_0 désigne l'intensité du champ de pesanteur à la surface de la Terre.

Le satellite SPOT (Satellite sPécialisé dans l'Observation de la Terre) est en orbite circulaire à l'altitude $h = 832\ km$ au-dessus de la Terre. Calculer numériquement la vitesse v_0 de SPOT sur son orbite.
3) L'origine de l'énergie potentielle gravitationnelle est choisie nulle à l'infini. Exprimer l'énergie mécanique $\mathcal{E}_m$ du satellite autour de la Terre en fonction de $\mathcal{G}$, M_T, r et m. Quel est l'effet des forces de frottements de l'atmosphère sur le rayon de la trajectoire et sur la vitesse du satellite?
4) Exprimer l'énergie mécanique ⇕ du satellite immobile à la surface de la Terre en un point de latitude λ en fonction de $\mathcal{G}$, M_T, m, R_T, λ et de la période T de rotation de la Terre autour de l'axe Sud-Nord.

Pourquoi lance-t-on préférentiellement les satellites depuis les régions de basse latitude (Kourou en Guyane française : latitude 5° Nord ; Cap Canaveral en Floride : latitude 28° Nord). Les lance-t-on plutôt vers l'Est ou vers l'Ouest?

*Un satellite artificiel de la Terre est **géostationnaire** s'il est immobile dans le référentiel terrestre: son orbite est circulaire, il survole constamment le même point de la surface de la Terre.*
Le satellite TELECOM *de masse $m_s = 1\ t$ est en orbite circulaire dans le plan de l'équateur. Il est géostationnaire .*



5) Peut-on placer un satellite géostationnaire en orbite en dehors du plan de l'équateur?
6) Calculer l'altitude h_G (ou distance au sol), la vitesse v_G et l'énergie mécanique $\mathcal{E}_{mG}$ du satellite TELECOM sur son orbite géostationnaire. Tous les satellites géostationnaires doivent-ils avoir la même masse?

EXTD9.1 **Modèle atomique de THOMSON** (d'après Pullicino, Nathan, p. 224)

En 1904, le physicien anglais Joseph John THOMSON *proposa de présenter l'atome d'hydrogène par un nuage sphérique de centre O, de rayon R et de charge $+e$ uniformément répartie. À l'intérieur de cette sphère, fixe dans le référentiel du laboratoire, se déplace librement un électron de masse m ponctuelle et de charge $-e$.*

Le référentiel du laboratoire $\mathcal{R}_g(O,\overrightarrow{e_x},\overrightarrow{e_y},\overrightarrow{e_z})$ est assimilé un référentiel galiléen.

En l'absence de toute action extérieure, l'électron M est soumis à une unique force d'origine électrostatique qui tend à attirer vers le point O : $\overrightarrow{F} = -k\overrightarrow{OM}$ avec $k = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{e^2}{R^3}$.

Cette force se comporte comme une force de rappel élastique due à un ressort de raideur k et de longueur à vide nulle, dont l'autre extrémité serait fixée en O.

À l'instant $t = 0$, une perturbation écarte légèrement l'électron de sa position d'équilibre avec les conditions initiales : $\overrightarrow{OM}(t=0) = \overrightarrow{OM_0} = r_0\overrightarrow{e_x}$ et $\overrightarrow{v}(t=O) = \overrightarrow{v_0} = v_0\overrightarrow{e_y}$.

<u>**Données :**</u> $m = 9{,}11.10^{-31}\ kg$; $e = 1{,}6.10^{-19}\ C$; $\dfrac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9.10^9\ uSI$

Vitesse de la lumière dans le vide : $c = 3.10^8\ m.s^{-1}$.

Equation d'une ellipse en coordonnées cartésiennes avec origine en O, d'axes de symétrie Ox et Oy : $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

1) Montrer qu'il y a conservation du moment cinétique en O de l'électron et déterminer sa valeur en fonction de r_0, v_0 et m.

En déduire que son mouvement reste confiné dans le plan (Oxy).

La position de M est donc repérée dans les bases $(\overrightarrow{e_x},\overrightarrow{e_y})$ et $(\overrightarrow{e_r},\overrightarrow{e_\theta})$ avec comme vecteurs positions respectifs :

$\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{e_x} + y\overrightarrow{e_y}$ et $\overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{e_r}$ (pour $r = \sqrt{x^2+y^2} \leq R$).

2) Exprimer la pulsation ω_0 du mouvement de M en fonction de ϵ_0, e, m et R. Calculer la valeur de R pour laquelle la pulsation ω_0 correspond à la fréquence ν_0 d'une des raies du spectre de LYMAN de l'atome d'hydrogène ($\lambda_0 = 121{,}8\ nm$).

3) Déterminer les expressions de $x(t)$ et $y(t)$. Montrer que la trajectoire du point M est une ellipse (ellipse de HOOKE) dont vous préciserez les longueurs a et b des demi axes.

4) À quelles condition cette trajectoire est-elle circulaire? Que se passe-t-il si $v_0 = 0$?

5) L'électron accéléré perd de l'énergie par rayonnement. Pour tenir compte de ce phénomène, une force supplémentaire de freinage est introduite. Elle a la forme d'une force de frottement de type visqueux : $\overrightarrow{f} = -h\overrightarrow{v}$, où h, cœfficient de freinage, est positif.

Quelle est l'évolution du moment cinétique en O de l'électron au cours du temps?

Dire qualitativement ce que sera le mouvement de l'électron pour de faibles amortissements.

Commenter quant à la stabilité de l'atome.

• Système étudié : $\{M,m,-e\}$, électron dans le référentiel terrestre supposé galiléen $\mathcal{R}_g$.

• Bilan des forces : le poids et l'interaction électrostatique exercée par le proton (O). Le poids étant négligeable devant cette dernière force, on a :

$$\overrightarrow{F}_{ext} = \overrightarrow{F} = -k\overrightarrow{OM} \text{ avec } k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{R^3}.$$

• Cette force est centrale, donc $\mathcal{M}_O(\overrightarrow{F}) = \overrightarrow{OM} \times \overrightarrow{F} = \overrightarrow{0}$.

1) • Le théorème du moment cinétique pour M appliqué en O point fixe du référentiel galiléen $\mathcal{R}_g$:

$$\left(\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{L}_{O/\mathcal{R}_g}(M)}{\mathrm{d}t}\right)_{/\mathcal{R}_g} = \mathcal{M}_O(\overrightarrow{F}) = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{L}_{O/\mathcal{R}_g}(M) = \overrightarrow{OM} \times m\overrightarrow{v}_{M/\mathcal{R}_g} = \overrightarrow{Cste}$$

• Le moment cinétique étant un vecteur constant, ce vecteur se calcule en considérant un instant particulier pour lequel on connaît les expressions du vecteur position $\overrightarrow{OM}$ et de la vitesse $\overrightarrow{v}_{M/\mathcal{R}_g}$. C'est le cas à $t = 0$:

$\overrightarrow{L}_{O/\mathcal{R}_g}(M) = \overrightarrow{OM_0} \times m\overrightarrow{v_0} = r_0\overrightarrow{e_x} \times mv_0\overrightarrow{e_y} = mr_0v_0\overrightarrow{e_z}$

D'où : $\boxed{\overrightarrow{L}_{O/\mathcal{R}_g}(M) = \overrightarrow{Cste} = mr_0v_0\overrightarrow{e_z}}$

• Comme $\forall t \quad \overrightarrow{L}_{O/\mathcal{R}_g}(M) \perp \mathcal{T} = (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{v}_{M/\mathcal{R}_g})$, on en déduit que la trajectoire (constituée par l'ensemble des points M contenus dans les plans $\mathcal{T}$) est tout le temps orthogonale à une direction constante qui celle de $\overrightarrow{L}_{O/\mathcal{R}_g}$; en l'occurence, $\overrightarrow{e_z}$.

Donc, la trajectoire de M est contenue dans le plan (Oxy).

2) Le **P**rincipe **F**ondamental de la **D**ynamique appliqué à l'électron donne : $m\overrightarrow{a}_{M/\mathcal{R}_g} = \overrightarrow{F}$, ce qui s'écrit aussi :

$$m\frac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t^2} = -k\overrightarrow{OM} \Leftrightarrow \boxed{\frac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{0}} \quad (\star)$$

avec : $\boxed{\omega_0^2 = \frac{k}{m}}$, soit : $\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{mR^3}}$.

• Si on impose $\omega_0 = 2\pi\nu_0 = 2\pi\frac{c}{\lambda_0}$, on en déduit que : $\boxed{R = \left(\frac{\lambda_0^2}{16\pi^3\epsilon_0}\frac{e^2}{mc^2}\right)^{1/3}}$

Pour l'application numérique, il suffit d'écrire R sous la forme :

$$\boxed{R = \left(\frac{\lambda_0^2}{4\pi^2}\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{mc^2}\right)^{1/3} = 100\ pm}$$

Ce résultat est cohérent avec la longueur caractéristique de la dimension d'un atome.

3) • La solution générale vectorielle de l'équation du mouvement $(\star)$ est : $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{A}\cos(\omega_0 t) + \overrightarrow{B}\sin(\omega_0 t)$

On en déduit l'expression générale de la vitesse de l'électron : $\overrightarrow{v}_{M/\mathcal{R}_g} = -\omega_0\overrightarrow{A}\sin(\omega_0 t) + \omega_0\overrightarrow{B}\cos(\omega_0 t)$

• Ces deux expressions générales doivent vérifier les deux conditions initiales : $\overrightarrow{OM}(t=0) = \overrightarrow{A} = r_0\overrightarrow{e_x}$ et $\overrightarrow{v}_{M/\mathcal{R}_g}(t=0) = \omega_0\overrightarrow{B} = v_0\overrightarrow{e_y}$, soit :

$$\boxed{\overrightarrow{OM} = r_0\cos(\omega_0 t)\overrightarrow{e_x} + \frac{v_0}{\omega_0}\sin(\omega_0 t)\overrightarrow{e_y}} \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} x(t) = r_0\cos(\omega_0 t) \\ y(t) = \frac{v_0}{\omega_0}\sin(\omega_0 t) \end{cases}}$$

• Comme $\cos^2(\omega_0 t) + \sin^2(\omega_0 t) = 1$ on en déduit l'équation de la trajectoire :

$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$, avec : $\boxed{a = r_0}$ et $\boxed{b = \frac{v_0^2}{\omega_0^2}}$

La trajectoire est une ellipse de centre O, de demi-grand axe a selon Ox et de demi-petit axe b selon Oy.

4) • Pour que la trajectoire *a priori* elliptique soit circulaire, il faut que $a = b$, soit : $\boxed{v_0 = r_0\omega_0}$.

• Lorsque la vitesse initiale de l'électron est nulle : $b = \frac{v_0}{\omega_0} = 0$. L'ellipse s'assimile à un segment $2a$: le mouvement est rectiligne selon Ox entre l'abscisse a et l'abscisse $-a$ (on retrouve l'oscillateur harmonique à une dimension).

Rque : On remarque l'importance des conditions initiales dues à la perturbation à $t = 0$, elles vont fixer la nature de la trajectoire de l'électron dans l'atome.

5) • Il faut prendre en compte une force de freinage dont il faut calculer le moment en O :

$$\mathcal{M}_O(\overrightarrow{f}) = \overrightarrow{OM} \times \overrightarrow{f} = \overrightarrow{OM} \times (-h\overrightarrow{v}) = -\frac{h}{m}\overrightarrow{OM} \times m\overrightarrow{v} = -\frac{h}{m}\overrightarrow{L}_{O/\mathcal{R}_g}(M)$$

Dès lors, le théorème du moment cinétique s'écrit :

$$\left(\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{L}_{O/\mathcal{R}_g}(M)}{\mathrm{d}t}\right)_{/\mathcal{R}_g} = \mathcal{M}_O(\overrightarrow{F}) + \mathcal{M}_O(\overrightarrow{f}) = \overrightarrow{0} - \frac{h}{m}\overrightarrow{L}_{O/\mathcal{R}_g}(M)$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{L}_{M/O}}{\mathrm{d}t}\right)_{/\mathcal{R}_g} + \frac{h}{m}\overrightarrow{L}_{M/O} = \overrightarrow{0} \quad \rightarrow \quad \boxed{\overrightarrow{L}_{M/O}(t) = \overrightarrow{L}_{M/O}(0)e^{-\frac{t}{\tau}}}$$

Conclusion : Le moment cinétique de l'électron en O tend vers $\overrightarrow{0}$ avec une constante de temps $\boxed{\tau = \frac{m}{h}}$.

• Le **P.F.D.** pour l'électron s'écrit désormais :

$$m\frac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t^2} = -k\overrightarrow{OM} - h\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t} \Leftrightarrow \boxed{\frac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{0}}$$

avec $\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}}$ et $\boxed{Q = \frac{m\omega_0}{h}}$

↪ On reconnaît l'équation différentielle d'un **oscillateur harmonique (spatial) amorti** : le rayon vecteur $r = OM$ tend vers 0.

Conclusion : Même si l'amortissement (qui traduit le rayonnement de l'électron) est faible, l'électron va se diriger inexorablement vers le centre O en tourbillonnant dans une trajectoire elliptique d'aire de plus en plus faible.

Rque : L'atome tel que l'a décrit ici THOMSON ne peut pas être stable. Niels BOHR crée en 1913 un autre modèle d'atome pour rendre compte de la stabilité atomique : les orbites des électrons sont alors quantifiées. ce fut le dernier modèle obéissant à la physique classique avant l'avènement de la physique quantique.

EXTD9.2 Quantification du moment cinétique : l'atome de BOHR (Pullicino, Nathan, p. 257)

En 1913, le physicien danois Niels BOHR *imagine un modèle «planétaire» de l'atome afin d'expliquer les raies émises par des atomes d'hydrogène excités. Ce modèle, aujourd'hui obsolète, ne permit pas d'expliquer les spectres des autres atomes. Une nouvelle physique fut nécessaire : la physique quantique.*

Dans le modèle de BOHR, l'atome d'hydrogène est un système à deux corps ponctuels constitué d'un noyau, le proton de masse m_p et charge électrique $+e$, et d'un électron M, de masse m_e et de charge $-e$.

La masse du proton étant près de 2 000 fois celle de l'électron, le proton est considéré comme fixe dans le référentiel d'étude supposé galiléen $\mathcal{R}_g(O,\overrightarrow{e_x},\overrightarrow{e_y},\overrightarrow{e_z})$ – où l'origine O correspond au noyau de l'atome.

Données : $h = 6{,}626.10^{-34}\ J.s$; $\epsilon_0 = 8{,}84.10^{-12}\ C^2.N^{-1}.m^{-2}$; $c = 3.10^8\ m.s^{-1}$; $m_e = 9{,}1.10^{-31}\ kg$; $e = 1{,}6.10^{-19}\ C$.

• **Premier postulat de BOHR :** L'électron se déplace uniquement sur certaines orbites circulaires appelés **états stationnaires**.

Ce mouvement peut être décrit par la physique classique.

D'après BOHR, l'électron a un mouvement circulaire de rayon r et de vitesse v autour de O.

Le champ de pesanteur est négligeable à l'échelle atomique et l'électron n'est soumis qu'à la force d'interaction électrostatique : $\overrightarrow{F} = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}\overrightarrow{e_r}$.

1) Montrer que le mouvement circulaire de l'électron autour du noyau est uniforme et exprimer v^2 en fonction de r, e, m_e et ϵ_0.

2) Exprimer l'énergie cinétique $\mathcal{E}_k(r)$, l'énergie potentielle d'interaction électrostatique $\mathcal{E}_p(r)$ et l'énergie (mécanique) $\mathcal{E}(r)$ de l'électron : $\mathcal{E}(r) = \mathcal{E}_k(r) + \mathcal{E}_p(r)$.

• **Deuxième postulat de Bohr d'après une idée de Planck :** L'électron accéléré par le proton ne peut pas rayonner de façon continue, mais doit attendre de passer d'une orbite permise n à une autre orbite d'énergie inférieure m pour émettre brutalement un **rayonnement sous la forme d'un photon** d'énergie : $h\nu_{n\to m} = \mathcal{E}_n - \mathcal{E}_m$ (avec $n > m$).
$\mathcal{E}_n$ et $\mathcal{E}_m$ sont les énergies des deux états n et m, h s'appelle la constante de Planck et $\nu_{n\to m}$ est la fréquence du rayonnement correspondant à la transition $n \to m$.
• Pour quantifier l'énergie de l'électron, Bohr ajouta un **troisième postulat** ou **condition de quantification** : les seules trajectoires circulaires permises sont celles pour lesquelles le moment cinétique orbital est un multiple entier de la constante de Planck réduite $\hbar$:

$$L_O(M) = n\hbar = n\frac{h}{2\pi}.$$

3) Déterminer la vitesse v de l'électron en fonction de r, m_e, h et du nombre quantique principal n (n entier ≥ 1).

4) Les trajectoires stables de l'électron sont des cercles de rayons r quantifiés par n tel que : $r = n^2 r_0$.
Calculer (en pm) le *rayon de* Bohr noté r_0.

5) En déduire l'énergie totale de l'électron quantifiée sous la forme : $\mathcal{E}_n = -\dfrac{\mathcal{E}_0}{n^2}$.

6) En supposant l'électron dans son état fondamental ($n = 1$), calculer sa vitesse v_0 et l'énergie d'ionisation de l'atome (l'exprimer en eV : $1\ eV = 1{,}6.10^{-19}\ J$).
L'électron est-il relativiste ?

7) Déterminer l'expression littérale de la constante de Rydberg R_H relative à l'atome d'hydrogène et calculer sa valeur sachant que :
$$\frac{1}{\lambda_{n\to m}} = \frac{\nu_{n\to m}}{c} = R_H\left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right)$$ (avec $n > m$ et c la vitesse de la lumière dans le vide).

• Système étudié : $\{M, m, -e\}$, électron dans le référentiel terrestre supposé galiléen $\mathcal{R}_g$.
• Bilan des forces : le poids et l'interaction électrostatique exercée par le proton (O). Le poids étant négligeable devant cette dernière force, on a :

$$\overrightarrow{F}_{ext} = \overrightarrow{F} = \frac{-e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}\overrightarrow{e_r}.$$

• Cette force est centrale, donc $\mathcal{M}_O(\overrightarrow{F}) = \overrightarrow{OM} \times \overrightarrow{F} = \overrightarrow{0}$.

1) • Le **P**rincipe **F**ondamental de la **D**ynamique appliqué à l'électron donne :

$$m_e\overrightarrow{a}_{M/\mathcal{R}_g} = \frac{-e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}\overrightarrow{e_r}$$

• La base adaptée à une trajectoire circulaire ($r = Cste$) et plane est la base polaire $(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta})$. L'accélération de l'électron dans cette base est :

$$\overrightarrow{a}_{M/\mathcal{R}_g} = -r\dot\theta^2\overrightarrow{e_r} + r\ddot\theta\overrightarrow{e_\theta} = -\frac{v^2}{r}\overrightarrow{e_r} + \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{e_\theta}$$

Le P.F.D. s'écrit donc : $-\dfrac{v^2}{r}\overrightarrow{e_r} + \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{e_\theta} = \dfrac{-e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}\overrightarrow{e_r}$, soit :

$\hookrightarrow$ En projection selon $\overrightarrow{e_\theta}$: $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 0 \Leftrightarrow \boxed{v = r\dot\theta = Cste}$: l'électron a un **mouvement circulaire uniforme** autour du noyau.

$\hookrightarrow$ En projection selon $\overrightarrow{e_r}$: $-\dfrac{v^2}{r} = \dfrac{-e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \Leftrightarrow \boxed{v = \dfrac{e}{\sqrt{4\pi\epsilon_0 m_e r}}}$ ①

2) • L'énergie cinétique de l'électron dans $\mathcal{R}_g$ est : $\boxed{\mathcal{E}_k(M) = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r} = \mathcal{E}_k(r)}$

• Pour déterminer l'énergie potentielle électrostatique, il faut revenir au travail élémentaire fourni par la force électrostatique $\overrightarrow{F}$:

$$\delta W(\overrightarrow{F}) = \overrightarrow{F} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{OM} = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}\overrightarrow{e_r} \cdot (\mathrm{d}r\overrightarrow{e_r} + r\mathrm{d}\theta\overrightarrow{e_\theta}) = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}\mathrm{d}r = -\mathrm{d}\mathcal{E}_p(r)$$

D'où : $\mathcal{E}_p(r) = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} + Cste$,

soit, en prenant $\mathcal{E}_p(r \to \infty) = 0$: $\boxed{\mathcal{E}_p(r) = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} = -2\mathcal{E}_k(r)}$

• L'énergie totale de l'électron est donc :

$$\boxed{\mathcal{E}(r) = \mathcal{E}_k(r) + \mathcal{E}_p(r) = -\mathcal{E}_k(r) = \frac{\mathcal{E}_p(r)}{2} = -\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r}} \quad (\star)$$

3) • L'expression du moment cinétique de l'électron dans $\mathcal{R}_g$ évalué en O est :
$\overrightarrow{L}_{O/\mathcal{R}_g}(M) = \overrightarrow{OM} \times m_e\overrightarrow{v} = r\overrightarrow{e_r} \times m_e v\overrightarrow{e_\theta} = m_e r v\overrightarrow{e_z}$.

• r, ce moment cinétique est quantifié, d'expression : $L_O(M) = m_e r v = n\frac{h}{2\pi}$,

d'où la vitesse de l'électron : $\boxed{v = n\frac{h}{2\pi m_e r}}$ ②

4) ① et ② permettent d'écrire : $v = \frac{e}{\sqrt{4\pi\epsilon_0 m_e r}} = n\frac{h}{2\pi m_e r}$

• Cette équation permet d'établir les rayons des trajectoires circulaires stables de l'électron autour du noyau : $\boxed{r = n^2\frac{\epsilon_0 h^2}{\pi m_e e^2} \equiv n^2 r_0}$ ③

• On en déduit la rayon de BOHR qui correspond à la trajectoire de l'électron dans son état fondamental $n = 1$:

$\boxed{r_0 = \frac{r}{n^2} = \frac{\epsilon_0 h^2}{\pi m_e e^2} = 53\,pm}$.

5) $(\star) \xrightarrow{③} \mathcal{E}(r) = -\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r} = -\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0}\frac{1}{n^2}\frac{\pi m_e e^2}{\epsilon_0 h^2}$

Ainsi : $\boxed{\mathcal{E}(r) = -\frac{\mathcal{E}_0}{n^2}}$ avec $\boxed{\mathcal{E}_0 = \frac{m_e e^4}{8\epsilon_0^2 h^2}}$ ④

6) • Lorsque l'électron est dans son état fondamental, c'est-à-dire dans son état de plus basse énergie ($n = 1$) correspondant à l'orbite la plus proche du noyau : $\mathcal{E}(r) = -\mathcal{E}_0 = -13{,}6\,eV$

• <u>**Définition :**</u> L'**énergie d'ionisation d'un atome** est l'énergie minimale à fournir à un atome gazeux $X_{(g)}$ dans son état fondamental pour lui arracher un électron.

Elle correspond au processus : $X_{(g)} \xrightarrow{\Delta\mathcal{E}_{ion}} X^+_{(g)} + e^-_{(g)}$.

Cette définition appliquée à l'atome d'hydrogène :

$$\underbrace{H_{(g)}}_{\text{État initial : } n=1} \xrightarrow{+\mathcal{E}_{ion}} \underbrace{H^+_{(g)} + e^-_{(g)}}_{\text{État final : } n\to\infty}.$$

D'où : $\boxed{\mathcal{E}_{ion} = \mathcal{E}(n \to \infty) - \mathcal{E}(n = 1) = \mathcal{E}_0 = 13{,}6\ eV}$.

• dans l'état fondamental, la vitesse de l'électron est, d'après ② et ④:

$\boxed{v_0 = \frac{h}{2\pi m_e r_0} = 2{,}2.10^6\ m.s^{-1}}$

• Cette vitesse reste éloignée de la vitesse de la lumière dans le vide ($\frac{v}{c} < 0{,}1$) : l'électron n'est pas relativiste.

7) Pour déterminer la constante de RYDBERG, écrivons l'énergie de l'électron dans les deux niveaux quantiques n et m considérés :

• Niveau supérieur n : $\mathcal{E}_n = -\dfrac{\mathcal{E}_0}{n^2}$

• Niveau inférieur $m < n$: $\mathcal{E}_m = -\dfrac{\mathcal{E}_0}{m^2} < \mathcal{E}_n$

• Lorsque l'atome dans le niveau d'énergie supérieur n se désexcite en passant dans le niveau d'énergie inférieur m, il libère un photon d'énergie $h\nu_{n\to m}$ telle que :

$$h\nu_{n\to m} = \mathcal{E}_n - \mathcal{E}_m = \mathcal{E}_0\left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right) \equiv h\frac{c}{\lambda_{n\to m}}$$

Ainsi, le nombre d'onde de ce photon est :

$$\frac{1}{\lambda_{n\to m}} = \frac{\mathcal{E}_0}{c}\left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right) \equiv R_H\left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right)$$

D'où : $\boxed{R_H = \dfrac{\mathcal{E}_0}{c} = \dfrac{m_e e^4}{8\epsilon_0^2 h^2 c} = 1{,}09.10^7\ m^{-1}}$

Rque : Le succès de la théorie de BOHR vient de la coïncidence entre les valeurs expérimentales de la constante de RYDBERG et la valeur calculée.

EXTD9.3 **Satellite géostationnaire** (Pullicino, Nathan, p. 250)

La Terre possède un seul stallite naturel : la Lune. De nombreux satellites artificiels sont par ailleurs placés en orbite autour de la Terre dans des buts variés tels que les télécommunications, la météorologie, la défense...
Le mouvement des satellites artificiels de la Terre est étudié dans le référentiel géocentrique $\mathcal{R}_G$ *supposé galiléen. Ce référentiel a pour origine le centre* O *de la Terre (supposée à symétrie sphérique) et ses axes sont orientés dans la direction de trois étoiles éloignées fixes. Dans le référentiel géocentrique, la Terre tourne autour de son axe avec une période de révolution* T *et une vitesse angulaire* Ω*.*

On désignera par M_T et R_T respectivement la masse et le rayon de la Terre. $\mathcal{G}$ est la constante de gravitation universelle.

Données : $T = 86\,164\ s$; $M_T = 5{,}98.10^{24}\ kg$; $R_T = 6\,370\ km$; $\mathcal{G} = 6{,}67.10^{-11}\ N.m^2.kg^{-2}$.
Un satellite artificiel M de masse m est en orbite circulaire de rayon r autour de la Terre. Les frottements dus à l'atmosphère sur le satellite sont négligés.

1) Montrer qu'un satellite artificiel en orbite circulaire autour de la Terre a nécessairement une trajectoire plane contenant le centre O de la Terre.

Méthode : Étude systématique d'un problème de mécanique : cas de mouvement à *force centrale*.

• **Définir le système étudié.**

• **Choisir le référentiel d'étude.**

• **Bilan des forces appliquées au système.**

↪ Le système est-il **conservatif** ?

Dit autrement, les forces appliquées au système dérivent-elles d'énergies potentielles ? Lesquelles ?

↪ Le mouvement est-il à *force* ***centrale*** *conservative* ?

Auquel cas, l'étude d'un tel mouvement est systématique :

◦ Établir la **conservation du moment cinétique** : montrer que le mouvement a lieu dans un **plan fixé** par les conditions initiales sur la position et la vitesse du système, et obéit à **la loi des aires**.

◦ Établir la **conservation de l'énergie mécanique**.

2) Démontrer que le mouvement du satellite autour de la Terre est uniforme et exprimer littéralement sa vitesse v_0. On exprimera d'abord v_0 en fonction de $\mathcal{G}$, M_T et r, puis en fonction de g_0, R_T et r, où g_0 désigne l'intensité du champ de pesanteur à la surface de la Terre.

Le satellite SPOT (Satellite sPécialisé dans l'Observation de la Terre) est en orbite circulaire à l'altitude $h = 832\ km$ au-dessus de la Terre. Calculer numériquement la vitesse v_0 de SPOT sur son orbite.

Méthode : • **Préciser le nombre de degrés de liberté du problème**
• **Détermination des équations du mouvement (par projection du PFD dans une base adaptée)**

→ Le théorème du moment cinétique ayant été utilisé en **1)** , on peut utiliser le cacactère vectoriel du **P**rincipe **F**ondamental de la **D**ynamique.

→ Les coordonnées polaires dans le plan de la trajectoire sont adaptées au mouvement à force centrale. L'origine O est au centre de force.

Rappels : ◦ Grandeurs cinématiques dans le cas général en base polaire dans un référentiel $\mathcal{R}$:

$$\overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{e_r} \qquad \overrightarrow{v}_{M/\mathcal{R}} = \dot{r}\overrightarrow{e_r} + r\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta} \qquad \overrightarrow{a}_{M/\mathcal{R}} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\overrightarrow{e_r} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\overrightarrow{e_\theta}$$

◦ Pour une trajectoire circulaire, les expressions précédente se simplifient en posant $r = Cste$:

$$\overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{e_r} \qquad \overrightarrow{v}_{M/\mathcal{R}} = r\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta} \qquad \overrightarrow{a}_{M/\mathcal{R}} = -r\dot{\theta}^2\overrightarrow{e_r} + r\ddot{\theta}\overrightarrow{e_\theta}$$

◦ Puisque le problème s'intéresse à la vitesse $v = r\dot{\theta}$ du satellite, il est plus judicieux d'écrire :

$$\overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{e_r} \qquad \overrightarrow{v}_{M/\mathcal{R}} = r\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta} = v\overrightarrow{e_\theta} \qquad \overrightarrow{a}_{M/\mathcal{R}} = -\frac{v^2}{r}\overrightarrow{e_r} + \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{e_\theta}$$

3) L'origine de l'énergie potentielle gravitationnelle est choisie nulle à l'infini. Exprimer l'énergie mécanique $\mathcal{E}_m$ du satellite autour de la Terre en fonction de $\mathcal{G}$, M_T, r et m.

Quel est l'effet des forces de frottements $\overrightarrow{f}$ de l'atmosphère sur le rayon de la trajectoire et sur la vitesse du satellite?

Méthode : Établir (ou revenir sur) la **conservation de l'énergie mécanique** en appliquant le **Théorème de l'énergie mécanique**.

4) Exprimer l'énergie mécanique $\mathcal{E}_m$ du satellite immobile à la surface de la Terre en un point de latitude λ en fonction de $\mathcal{G}$, M_T, m, R_T, λ et de la période T de rotation de la Terre autour de l'axe Sud-Nord.

Pourquoi lance-t-on préférentiellement les satellites depuis les régions de basse latitude (Kourou en Guyane française : latitude 5° Nord ; Cap Canaveral en Floride : latitude 28° Nord). Les lance-t-on plutôt vers l'Est ou vers l'Ouest ?

Quelle est la vitesse v_{sol} calculée dans le référentiel géocentrique d'un point posé à la surface du sol terrestre dans le plan de l'équateur ?

Méthode : Le satellite est immobile sur la surface de la Terre **mais** en rotation dans le référentiel géocentrique $\mathcal{R}_G$.

Attention : Ce référentiel ne tourne pas avec la Terre dans le référentiel de **Copernic**, car ses axes sont orientés vers des étoiles éloignées fixes. C'est la Terre qui tourne autour de l'axe des pôles (SN) dans $\mathcal{R}_G$.

La vitesse du **satellite fixe au sol** M est donc la vitesse d'un point de la surface de la Terre confondu avec lui (un point coïncident) en rotation autour de l'axe (SN).

↪ La trajectoire du satellite est donc circulaire de rayon $R = HM$ qui s'exprime en fonction de R_T et de λ, dans le plan passant par H parallèle au plan de l'Équateur.

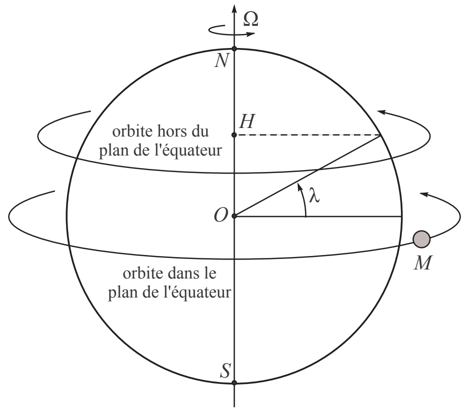
↪ Il faut donc écrire la vitesse de M en coordonnées polaires (cf. Rappels en **3)**), avec origine en H, en faisant apparaître $\Omega = \dot{\theta}$ qui est la vitesse angulaire de la Terre autour de son axe.

◦ La vitesse angulaire est associée à la période de révolution par quelle relation ?

*Un satellite artificiel de la Terre est **géostationnaire** s'il est immobile dans le référentiel terrestre: son orbite est circulaire, il survole constamment le même point de la surface de la Terre.*

Le satellite TELECOM *de masse $m_s = 1$ t est en orbite circulaire dans le plan de l'équateur. Il est géostationnaire .*

5) Peut-on placer un satellite géostationnaire en orbite en dehors du plan de l'équateur ?
6) Vérifier qu'un satellite géostationnaire vérifie la troisième loi de KÉPLER.
Calculer l'altitude h_G (ou distance au sol), la vitesse v_G et l'énergie mécanique $\mathcal{E}_{mG}$ du satellite TELECOM sur son orbite géostationnaire. Tous les satellites géostationnaires doivent-ils avoir la même masse ?



Méthode : Utiliser la **Troisième loi de Kepler** : loi propre aux trajectoires circulaires ou elliptiques d'astres tournant autour du même centre de force et dont l'interaction mutuelle est négligée.
→ L'appliquer ici au cas de satellites en orbite autour de la Terre.
∘ Cette loi est indépendante de la masse m du satellite. Elle dépend de a, rayon de la trajectoire circulaire ou demi-grand axe de la trajectoire elliptique.
∘ Elle dépend aussi de M_T, masse de la Terre associée au centre de force O. La Terre est cici supposée à symétrie sphérique : cema signifie que la répartition de sa masse ne dépend que de r. Dans ce cas, la Terre se comporte comme un point matériel situé en O auquel on associe la masse totale M_T.

7) Comparer les termes $\mathcal{E}_{mG}$, $\mathcal{E}_{kG}$ et $\mathcal{E}_{pG}$ d'un satellite géostationnaire avec les termes correspondants $\mathcal{E}_{m0}$, $\mathcal{E}_{k0}$ et $\mathcal{E}_{p0}$ du satellite immobile à la surface de la Terre dans le plan de l'équateur.

Solution **1)** • Système étudié : $\{M,m\}$, satellite de la Terre étudié le référentiel géocentrique supposé galiléen $\mathcal{R}_G$.
• Bilan des forces : la seule force appliqué à M est la force gravitationnelle :
$$\overrightarrow{F}_{ext} = \overrightarrow{F} = -\mathcal{G}\frac{M_T m}{r^2}\overrightarrow{e_r} = -\mathcal{G}\frac{M_T m}{r^3}\overrightarrow{OM}.$$
• Cette force est **conservative**, dérivant de l'énergie potentielle gravitationnelle :
$$\boxed{\mathcal{E}_{p,grav} = -\mathcal{G}\frac{M_T m}{r}}$$ (en choisissant l'origine de l'énergie potentielle pour $r \to \infty$).
• Cette force est également **centrale**, donc $\mathcal{M}_O(\overrightarrow{F}) = \overrightarrow{OM} \times \overrightarrow{F} = \overrightarrow{0}$.
↪ le théorème du moment cinétique appliqué en O dans $\mathcal{R}_G$ conduit donc à :
$$\left(\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{L}_{O/\mathcal{R}_G}(M)}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}_G} = \mathcal{M}_O(\overrightarrow{F}) = \overrightarrow{O} \Leftrightarrow \boxed{\overrightarrow{L}_{O/\mathcal{R}_G}(M) = \overrightarrow{Cste}}$$
• Comme $\forall t \quad \overrightarrow{L}_{O/\mathcal{R}_g}(M) \perp \mathcal{T} = (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{v}_{M/\mathcal{R}_g})$, on en déduit que la trajectoire (constituée par l'ensemble des points M contenus dans les plans $\mathcal{T}$) est tout le temps orthogonale à une direction constante qui celle de $\overrightarrow{L}_{O/\mathcal{R}_g}$ – qu'on peut librement choisir selon $\overrightarrow{e_z}$.
Dès lors, la trajectoire de M est contenue dans le plan (Oxy).

2) • Pour le point matériel M en mouvement circulaire dans le référentiel géocentrique, le **P**rincipe **F**ondamental de la **Dynamique** s'écrit :
$$m\overrightarrow{a}_{M/\mathcal{R}_G} = \overrightarrow{F} \Leftrightarrow m(-r\dot{\theta}^2\overrightarrow{e_r} + r\ddot{\theta}\overrightarrow{e_\theta}) = -\mathcal{G}\frac{M_T m}{r^2}\overrightarrow{e_r}, \text{ soit :}$$
$$\left\{\begin{array}{lll} -m\frac{v^2}{r} & = -\mathcal{G}\frac{M_T m}{r^2} & ① \\ m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} & = 0 & ② \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} ② \to \boxed{v = v_0 = ctse} \text{ Mvmnt circulaire } \textbf{uniforme} \\ ① \to \boxed{v_0 = \sqrt{\frac{\mathcal{G}M_T}{r}}} \end{array}\right.$$

• À la surface de la Terre, si l'on assimile le champ de pesanteur au champ gravitationnel : $mg_0 \approx \mathcal{G}\frac{M_T m}{R_T^2}$, d'où : $\boxed{\mathcal{G}M_T \approx g_0 R_T^2}$.

Alors : $\boxed{v_0 = R_T\sqrt{\frac{g_0}{r}} = R_T\sqrt{\frac{g_0}{R_T+h}} = 7{,}44\ km.s^{-1}}$

3) • Le satellite n'étant soumis qu'à une force conservative, le **Théorème de l'énergie mécanique** s'écrit :

$\mathrm{d}\mathcal{E}_m = \delta W_{NC} = 0 \Leftrightarrow \mathcal{E}_m = Cste$

Or : $\mathcal{E}_k = \frac{1}{2}mv^2 = cste = \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}\mathcal{G}\frac{M_T m}{r} \Leftrightarrow \boxed{\mathcal{E}_k = cste = -\frac{1}{2}\mathcal{E}_{p,grav}}$

D'où : $\boxed{\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_k + \mathcal{E}_{p,grav} = -\mathcal{E}_k = -\frac{1}{2}\mathcal{G}\frac{M_T m}{r}}$.

• Lorsque des forces de frottements (forces non conservatives qui s'opposent au mouvement) apparaissent, le **Théorème de la puissance mécanique** s'écrit :

$\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_m}{\mathrm{d}t} = \mathcal{P}_{NC/\mathcal{R}_G} = \vec{f}\cdot\vec{v}_{M/\mathcal{R}_G} < 0$

Alors, l'énergie mécanique diminue au cours du temps : le rayon de la trajectoire sera de plus en plus faible ($r \searrow$) et le mouvement tourbillonnaire autour du centre de force se fera avec une vitesse... de plus en plus grande ($v \nearrow$) !

4) • Lorsque le satellite est posé sur la Terre en un point de latitude λ, son énergie mécanique dans le référentiel géocentrique se compose :

∘ de l'énergie cinétique d'un point matériel M en rotation de rayon $\rho = R_T\cos\lambda$ autour de l'axe des pôles à la vitesse angulaire Ω : $\mathcal{E}_k = \frac{1}{2}mv^2_{M/\mathcal{R}_G} = \frac{1}{2}m(\rho\Omega)^2$, soit :

$$\boxed{\mathcal{E}_k = \frac{1}{2}m\left(\frac{2\pi}{T}R_T\cos\lambda\right)^2}$$

∘ de l'énergie potentielle gravitationnelle qui est inversement proportionnelle à la distance dui satellite au centre de force ($r = OM = R_T$ dans ce cas) : $\boxed{\mathcal{E}_{p,grav} = -\mathcal{G}\frac{M_T m}{R_T}}$

→ D'où : $\boxed{\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_0 = \frac{1}{2}m\left(\frac{2\pi}{T}R_T\cos\lambda\right)^2 - \mathcal{G}\frac{M_T m}{R_T}}$

• On constate que cette énergie mécanique est maximale lorsque $\lambda = 0$, c'est-à-dire sur l'Équateur. Puisque le terme d'énergie potentielle est indépendant de la latitude (on suppose la Terre parfaitement sphérique), cela veut dire qu'à l'énergie mécanique maximale correspond une énergie cinétique maximale dans le référentiel géocentrique **due à la rotation de la Terre** : $\mathcal{E}_{k,max}^{\text{rotation}} = \frac{1}{2}m\left(\frac{2\pi}{T}R_T\right)^2$.

Or, pour lancer le satellite, il faut lui fournir un supplément d'énergie cinétique dans le référentiel géocentrique. Ce supplément sera d'autant plus faible que l'énergie cinétique du satellite est déjà importante – ce qui est le cas lorsqu'on est à l'Équateur.

Mais pour bénéficier de cette énergie cinétique maximale à l'Équateur dû à la rotation de la Terre, il faut bien entendu envoyer le satellite dans le sens de rotation de la Terre, c'est-à-dire vers l'Est.

• $\boxed{v_{sol}(\lambda = 0) = \frac{2\pi}{T}R_T = 0{,}46\ km.s^{-1}}$.

5) Le plan de la trajectoire circulaire du satellite M doit contenir le centre de force O (cf. **1)**).

Pour qu'un satellite géostationnaire soit toujours au-dessus d'un même point de la surface terrestre, il est impératif que le plan de sa trajectoire circulaire soit orthogonale à l'axe des pôles.

Conclusion : **tous les satellites géostationnaires sont contenus dans le plan de l'Équateur.**

6) • Un satellite géostationnaire doit tourner dans le plan de l'équateur (cf. **5)**) sur un cercle de rayon r_G avec la même vitesse angulaire Ω que la Terre (de manière à être en permanence au-dessus du même point de la surface de le Terre) : $v_G = r_G\Omega = r_G\dfrac{2\pi}{T}$.

• Comme, par ailleurs, cette vitesse s'écrit également (cf. **2)**) : $v_G = \sqrt{\dfrac{\mathcal{G}M_T}{r_G}}$, on en déduit **la troisième loi de Képler** :

$$v_G = \sqrt{\frac{\mathcal{G}M_T}{r_G}} = r_G\frac{2\pi}{T} \Leftrightarrow \boxed{\frac{T^2}{r_G^3} = \frac{4\pi^2}{\mathcal{G}M_T}}$$

• Sachant que $r_G = R_T + h_G$, on en déduit l'altitude d'un satellite géostationnaire :

$$\boxed{r_G = \left(\frac{T^2\mathcal{G}M_T}{4\pi^2}\right)^{1/3} = 42\,170\ km} \Leftrightarrow \boxed{h_G = r_G - R_T = 35\,800\ km}$$

• La vitesse de rotation du satellite géostationnaire est :

$$\boxed{v_G = r_G\Omega = (R_T + h_G)\frac{2\pi}{T} = 3{,}07\ km.s^{-1}}$$

ces résultat son indépendant de la masse du satellite géostationnaire considéré. On retiendra que l'altitude de l'orbite géostationnaire est $\sim 36\,000\ km$**.**

• L'énergie mécanique du satellite TELECOM dans le référentiel géocentrique est :

$$\boxed{\mathcal{E}_{mG} = \underbrace{\frac{1}{2}mv_G^2}_{4{,}7.10^9\ J} - \underbrace{\mathcal{G}\frac{M_Tm}{r_G}}_{9{,}4.10^9\ J} = -4{,}7.10^9\ J}$$

7) Ces grandeurs sont à comparer avec les termes d'énergie cinétique de rotation et d'énergie potentielle gravitationnelle du satellite immobile à la surface de la Terre :

$$\boxed{\mathcal{E}_{m0} = \underbrace{\frac{1}{2}m\left(\frac{2\pi}{T}R_T\right)^2}_{0{,}1.10^9\ J} - \underbrace{\mathcal{G}\frac{M_Tm}{R_T}}_{62{,}6.10^9\ J} = -62{,}5.10^9\ J}$$