CORRECTION DES DEVOIRS LIBRES n°11-12

I – ÉTUDE DE LA RÉPONSE HARMONIQUE

Premièrement : Cf. **DL6**!! …ensuite : remarquons que sur le schéma et dans l'énoncé, la côte z par rapport à l'horizontale est désormais notée s!

I.1 Comportement sur une route difficile du véhicule chargé.

I.1.a • la période spatiale ('distance entre deux bosses') correspond à $\gamma\lambda = 2\pi$, soit :

$$\boxed{\lambda = \frac{2\pi}{\gamma}}$$

• Le véhicule roule selon (Ox) à la vitesse $V = cte$, donc, (avec un choix judicieux de l'origine des temps), $x = Vt$ et $e(x)$ peut s'écrire explicitement en fonction du temps t :

$$e(t) = e_m \cos(\gamma x) = e_m \cos(\gamma V\, t) = e_m \cos(\omega t) \;\Rightarrow\; \boxed{\omega = \gamma V = 2\pi \frac{V}{\lambda}}$$

Ce qui se trouve également en écrivant que le temps mis entre deux bosses est $T = \dfrac{\lambda}{V} = \dfrac{2\pi}{\omega}$.

I.1.b • La force de frottement exercée par l'amortisseur sur le châssis est proportionnelle à la différence de vitesse de ses extrémités : $\overrightarrow{F}_{\text{frot}} = -a\,(\dot z_C - \dot z_A)\,\overrightarrow{e_z} = -a\,(\dot s - \dot e)\,\overrightarrow{e_z}$. Donc, selon $\overrightarrow{e_z}$:

$$\boxed{F_{\text{frot}} = -a\,(\dot s - \dot e)}$$

• L'équation traduisant l'équilibre du véhicule en charge nominale est toujours :

$$0 = -k(L'_e - L_0) - \frac{(M+4m)\,g}{4} \quad (1'')$$

Tandis que l'équation du mouvement du châssis chargé selon $\overrightarrow{e_z}$ devient :

$$\frac{(M+4m)}{4}\,\ddot s = -k(L - L_0) - \frac{(M+4m)\,g}{4} - a\,(\dot s - \dot e) \quad (2'')$$

Soit, en faisant $(2'') - (1'')$, avec $L - L'_e = s - e - z'_0$:

$$\boxed{\ddot s + \alpha'\,\dot s + \beta'\,s = f + \delta' \quad (\star) \qquad \text{avec} \qquad \alpha' = \frac{4a}{M+4m} \quad \beta' = \frac{4k}{M+4m} \quad \delta' = \frac{4k}{M+4m}\,z'_0}$$

$$\text{et} \quad \boxed{f = \alpha'\,\dot e + \beta'\,e}$$

I.2 Régime forcé permanent.

I.2.a Le régime forcé permanent est le régime des oscillations sinusoïdales de pulsation ω imposées au système une fois que le régime transitoire a disparu.
Il correspond à la solution particulière de l'équation différentielle. Il est de forme sinusoïdale et de pulsation ω.

I.2.b • On cherche à résoudre, en notation complexes ($\underline{e} = e_m\,e^{j\omega t}$ et $\underline{s} = \underline{S}\,e^{j\omega t}$), l'équation :

$$\underline{\ddot s} + \alpha'\,\underline{\dot s} + \beta'\,\underline{s} = \underline{f}.$$

• On ne tient pas compte du terme δ' dans $(\star)$ parce que seules les oscillations du châssis nous intéresse; or δ' n'intervient que par l'ajout d'une constante ($z'_0 = s_0$) dans la solution particulière. (Négliger δ' revient, finalement, à translater le repère à la position d'équilibre s_0.)

• En complexes, il vient : $\underline{S}\,(\beta' - \omega^2 + j\omega\alpha') = e_m\,(\beta' + j\omega\alpha')$, soit :

$$\boxed{\underline{S} = e_m\,\frac{\beta' + j\omega\alpha'}{\beta' - \omega^2 + j\omega\alpha'}}$$

$$\boxed{\underline{S} = e_m\,\frac{1 + j\,\dfrac{\Omega}{Q}}{1 - \Omega^2 + j\,\dfrac{\Omega}{Q}}} \quad \text{avec :} \quad \boxed{\Omega = \frac{\omega}{\omega'_0}} \quad \boxed{\omega'_0 = \sqrt{\beta'} = \sqrt{\frac{4k}{M+4m}}} \quad \boxed{Q = \frac{\omega'_0}{\alpha'} = \sqrt{\frac{M+4m}{4M}}}$$

I.2.c • Donc : $\boxed{S = |\underline{S}| = e_m\sqrt{\dfrac{1 + \dfrac{\Omega^2}{Q^2}}{(1-\Omega^2)^2 + \dfrac{\Omega^2}{Q^2}}}}$.

• Lorsque $\Omega = 1$, $\boxed{S_{\Omega=1} = e_m\sqrt{1+Q^2}}$.

I.2.d • On pose $u = \Omega^2$ et on dérive $g(u) = \left(\dfrac{S}{e_m}\right)^2 = \dfrac{1 + \dfrac{u}{Q^2}}{(1-u)^2 + \dfrac{u}{Q^2}}$ par rapport à u :

$\dfrac{dg}{du} = \ldots \rightarrow$ cette dérivée s'annule pour : $\dfrac{1}{2Q^2}\,u^2 + u - 1 = 0$.
Or, ce polynôme n'a qu'une seule racine positive ($u > 0$!) qui est :

$$u_m = Q^2\left(\sqrt{1 + \frac{1}{2Q^2}} - 1\right) \implies \boxed{\Omega_m = Q\sqrt{\sqrt{1 + \frac{1}{2Q^2}} - 1}}$$

Ω_m est la pulsation réduite de résonance correspondant à une résonance des oscillations du châssis roulant sur la route ondulée.

• $\left(\dfrac{S_m}{e_m}\right)^2 = \dfrac{1 + \dfrac{u_m}{Q^2}}{(1-u_m)^2 + \dfrac{u_m}{Q^2}}$, avec, par définition de u_m : $\dfrac{1}{2Q^2}\,u_m^2 + u_m - 1 = 0 \Rightarrow \dfrac{u_m}{Q^2} = \dfrac{2 - 2u_m}{u_m}$.

Donc :

$$\left(\frac{S_m}{e_m}\right)^2 = \frac{\dfrac{2-u_m}{u_m}}{(1-u_m)^2 + 2\,\dfrac{1-u_m}{u_m}} = \frac{2-u_m}{u_m(1-u_m)^2 + 2\,(1-u_m)} = \frac{2-um}{(1-um)(u_m - u_m^2 + 2)}$$

Soit : $\left(\dfrac{S_m}{e_m}\right)^2 = \dfrac{2-u_m}{(1-u_m)(2-u_m)(1+u_m)} = \dfrac{1}{1-u_m^2}$

Donc :

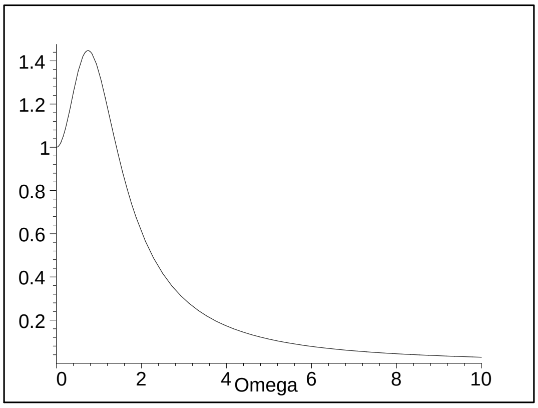
$$\boxed{\frac{S_m}{e_m} = \sqrt{\frac{1}{1-\Omega_m^4}}}$$

.

I.2.e **AN :** $\boxed{Q = 0{,}59 \quad \Omega_m = 0{,}75 \quad \dfrac{S_m}{e_m} = 1{,}2}$.

Remarquons que nous sommes dans une situation où le facteur de qualité est faible, pour avoir une faible acuité à la résonance ($\frac{S_m}{e_m}$).

I.2.f



I.2.g • La valeur de la pulsation propre du système est :

$$\boxed{\omega'_0 = \sqrt{\frac{4k}{M+4m}} = 2\sqrt{\frac{44\,100}{1\,400}} = 11{,}2\ rad.s^{-1}}$$

• Pour être à la résonance, il faut que $\omega = \omega_m = \Omega_m\,\omega'_0 = 0{,}75\omega'_0 = 8{,}4\ rad.s^{-1}$.

Or, $\lambda = VT = V\,\dfrac{2\pi}{\omega}$, donc, la distance λ_m entre les ondulations du sol qui commande la résonance des oscillations du châssis si le véhicule roule à vitesse V constante est :

$$\boxed{\lambda_m = V\,\frac{2\pi}{\omega_m} = V\,\frac{2\pi}{0{,}75\omega'_0} = 18{,}7\ m}$$

• Si les déformations sont plus rapprochées, $\lambda < \lambda_m$, soit $\omega > \omega_m$; on sort donc de la zone de résonance et les oscillations de la route sont alors mieux absorbées par le véhicule ($\dfrac{S}{e_m} < \dfrac{S_m}{e_m}$).

II – ANALOGIE ÉLECTRIQUE

II.1 **II.1.a** En convention récepteur :

$$\boxed{u_R = R\,i_R \qquad u_L = L\,\frac{di_L}{dt} \qquad i_C = \frac{dq}{dt} = C\,\frac{du_C}{dt}}$$

II.1.b Aux trois relations précédentes correspondent les relations entre amplitudes complexes (en posant $\underline{i} = \underline{I}\,e^{j\omega t}$ et $\underline{u} = \underline{U}\,e^{j\omega t}$) :

$$\underline{U}_R = R\,\underline{I}_R \qquad \underline{U}_L = jL\omega\,\underline{I}_L \qquad \underline{U}_C = \frac{1}{jC\omega}\,\underline{I}_C$$

II.2 **II.2.a** L'impédance du circuit est : $\underline{Z} = \underline{Z}_R // \underline{Z}_L + \underline{Z}_C = \dfrac{jLR\omega}{R + jL\omega} + \dfrac{1}{jC\omega}$.

$$\boxed{\underline{Z} = \frac{R - RCL\omega^2 + jL\omega}{jC\omega\,(R + jL\omega)}}$$

II.2.b Diviseur de tension entre $\underline{U}_s$ et $\underline{U}_e$:

$$\frac{\underline{U}_s}{\underline{U}_e} = \frac{\underline{Z}_C}{\underline{Z}} = \frac{R + jL\omega}{R - RCL\omega^2 + jL\omega} = \frac{1 + j\,\dfrac{L\omega}{R}}{1 - CL\omega^2 + j\,\dfrac{L\omega}{R}}$$

Soit : $\boxed{\dfrac{\underline{U}_s}{\underline{U}_e} = \dfrac{1 + j\,\dfrac{\Omega}{Q}}{1 - \Omega^2 + j\,\dfrac{\Omega}{Q}}}$ avec : $\boxed{\Omega = \dfrac{\omega}{\omega_0}}$ $\boxed{\omega_0 = \sqrt{\dfrac{1}{LC}}}$ $\boxed{Q = \dfrac{R}{L\omega_0} = R\sqrt{\dfrac{C}{L}}}$.

II.3 **II.3.a** La puissance dissipée par effet Joule est en moyenne :

$$< \mathcal{P}_J >= \frac{1}{T}\int_0^T Ri^2\,dt = \frac{1}{2}\,RI_1^2 = \frac{1}{2}\,\frac{U_R^2}{R} = \frac{1}{2R}\,\frac{L^2\omega^2}{1 + \dfrac{L^2\omega^2}{R^2}}\,I^2 = \frac{1}{2R}\,\frac{L^2\omega^2}{1 + \dfrac{L^2\omega^2}{R^2}}\,\frac{C^2\omega^2\left(1 + \dfrac{L^2\omega^2}{R^2}\right)}{(1 - LC\omega^2)^2 + \dfrac{L^2\omega^2}{R^2}}\,U_e^2$$

$$\boxed{< \mathcal{P}_J >= \frac{1}{2R}\,\frac{L^2C^2\omega^4}{(1 - LC\omega^2)^2 + \dfrac{L^2\omega^2}{R^2}}\,U_e^2}$$

II.3.b La puissance dissipée par frottement visqueux dans l'amortisseur est en moyenne :

$$< \mathcal{P}_f >= \frac{1}{T}\int_0^T |\overrightarrow{F}_{\text{frot}} \cdot (\dot{s} - \dot{e})\,\overrightarrow{e_z}|dt = \frac{1}{T}\int_0^T a\,(\dot{s} - \dot{e})^2 dt = a < (\dot{s} - \dot{e})^2 >.$$

Pour calculer $(\dot{s} - \dot{e})$, il faut prendre la partie réelle de $(\underline{\dot{s}} - \underline{\dot{e}})$, avec, d'après **II.2.b)** :

$$\underline{s} = \underline{e}\,\frac{\beta' + j\omega\alpha'}{\beta' - \omega^2 + j\omega\alpha'} \qquad \text{et donc :} \qquad \underline{\dot{s}} = \underline{\dot{e}}\,\frac{\beta' + j\omega\alpha'}{\beta' - \omega^2 + j\omega\alpha'}$$

ce qui donne : $\underline{\dot{s}} - \underline{\dot{e}} = \underline{\dot{e}}\,\dfrac{\omega^2}{\beta' - \omega^2 + j\omega\alpha'} = \underline{\dot{e}}\,\dfrac{\omega^2(\beta' - \omega^2 - j\omega\alpha')}{(\beta' - \omega^2)^2 + \alpha'^2\omega^2}$.

Et donc : $\mathcal{R}e(\underline{\dot{s}} - \underline{\dot{e}}) = \dot{s} - \dot{e} = \dfrac{V_e\,\omega^2}{(\beta' - \omega^2)^2 + \alpha'^2\omega^2}\,((\beta' - \omega^2)\cos\omega t + \alpha'\omega\sin\omega t)$.

Alors : $< \mathcal{P}_f >= a < (\dot{s} - \dot{e})^2 >$, ce qui donne :

$$< \mathcal{P}_f >= \frac{V_e^2\,\omega^4}{((\beta' - \omega^2)^2 + \alpha'^2\omega^2)^2}\,((\beta'-\omega^2)^2\underbrace{< cos^2\omega t >}_{\frac{1}{2}} + \alpha'^2\omega^2\underbrace{< \sin^2\omega t >}_{\frac{1}{2}} + 2(\beta'-\omega^2)\alpha'\omega\underbrace{< \cos(\omega t)\sin(\omega t) >}_{0}).$$

Finalement : $\boxed{< \mathcal{P}_f >= \dfrac{1}{2}\,aV_e^2\,\dfrac{\omega^4}{(\beta' - \omega^2)^2 + \alpha'^2\omega^2} = \dfrac{1}{2}\,a\,\dfrac{\left(\dfrac{m + M/4}{k}\right)^2\omega^4}{\left(1 - \dfrac{m + M/4}{k}\,\omega^2\right)^2 + \dfrac{a^2}{k^2}\,\omega^2}}$

II.3.c la comparaison des deux expressions des puissances moyennes dissipées par le système mécanique en suspension et le circuit électrique permet d'identifier les **équivalences électromécaniques** suivantes :

$$\boxed{a \longleftrightarrow \frac{1}{R} \qquad k \longleftrightarrow \frac{1}{L} \qquad m + \frac{M}{4} \longleftrightarrow C \qquad V_s \longleftrightarrow U_s}$$

(Pour la dernière analogie, comparer $\dfrac{\underline{s}}{\underline{e}}$ avec $\dfrac{\underline{U}_s}{\underline{U}_e}$.)