CORRECTION DU DEVOIR SURVEILLÉ n°5bis

8 *pts*

I – Filtre Passe-Haut (d'après ENSAIT 2002, Problème 2)

I.1 La fonction de transfert d'un filtre passe-haut CR est : $\underline{H} = \dfrac{jx}{1+jx}$ avec $x \equiv \dfrac{\omega}{\omega_0}$ et $\omega_0 \equiv \dfrac{1}{RC}$.

On a donc : $G_{dB}(\omega) = 20\log H = 20\log\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}} = 20\log\dfrac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}}$.

Et on désire que : $G_{dB} = -6\ dB = 2.(-3) \simeq 2.20\log\dfrac{1}{\sqrt{2}} = 20\log\dfrac{1}{2} = 20\log\dfrac{1}{\sqrt{4}}$.

Donc :

$$\frac{RC\omega}{\sqrt{1+R^2C^2\omega^2}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}} = \frac{1}{\sqrt{4}} \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \boxed{C = \frac{1}{\sqrt{3}\,R\,\omega} = \frac{1}{\sqrt{3}\,R\,2\pi f_e} = 9{,}2\ nF}$$

I.2 Le déphasage de v_s par rapport à v_e est l'argument de la fonction de transfert qu'on peut écrire sous la forme $\underline{H} = \dfrac{1}{1-j\dfrac{1}{x}}$, donc : $\varphi = \arg\underline{H} = -\arg\left(1-j\dfrac{1}{x}\right) = -\arctan\left(-\dfrac{1}{x}\right)$,

soit $\boxed{\varphi = \arctan\dfrac{1}{x} = \arctan\dfrac{1}{RC2\pi f}}$.

D'où, avec les valeurs numériques précédentes, $\boxed{\varphi = \arctan\sqrt{3} = \dfrac{\pi}{3}\ rd = +60°}$

I.3 • Si $\varphi = 45°$, alors $\tan\varphi = \dfrac{1}{RC2\pi f_1} = 1$, soit $\boxed{f_1 = \dfrac{1}{RC2\pi} \simeq 1\,730\ Hz}$.

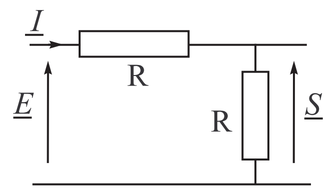
• Si $\varphi = 30°$, alors $\tan\varphi = \dfrac{1}{RC2\pi f_2} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$, soit $\boxed{f_2 = \dfrac{\sqrt{3}}{RC2\pi} \simeq 3\,000\ Hz}$.

8 *pts*

II – CC2000 Petites Mines

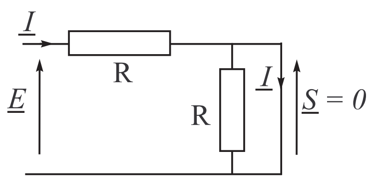
0,5 + 0,5 *pts*

II.1 • Aux BF, une capacité se comporte comme un interrupteur ouvert et les deux résistances sont en série, soit :
$\underline{S} = \dfrac{\underline{E}}{2}$ et $\underline{H} = \dfrac{1}{2}$.
$G_{dB}(\omega \to 0) \ \longrightarrow\ -6\ dB$



0,5 + 0,5 *pts*

• Aux HF, une capacité se comporte comme un fil, donc :
$\underline{S}\ \to\ 0$ et $\underline{H}\ \to 0$.
$G_{dB}(\omega \to \infty)\ \longrightarrow\ -\infty\ dB$



• **Cl:** Ils 'agit d'un **filtre Passe Bas**.

Rque : On en déduit que $H_{max} = \dfrac{1}{2} \ \Leftrightarrow\ G_{dB}(max) = -6\ dB$.

1,5 *pts*

II.2 $\underline{H} = \dfrac{\underline{S}}{\underline{E}} = \dfrac{\underline{Z}}{R+\underline{Z}} = \dfrac{R}{1+jRC\omega}\,\dfrac{1}{1+\dfrac{R}{1+jRC\omega}} = \dfrac{R}{R+R+jR^2C\omega}$

$$\boxed{\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{2 + jRC\omega} = \frac{1}{2 + jx}} \quad \text{avec} \quad \boxed{x \equiv RC\omega}$$

II.3 La définition de la pulsation de coupure est :

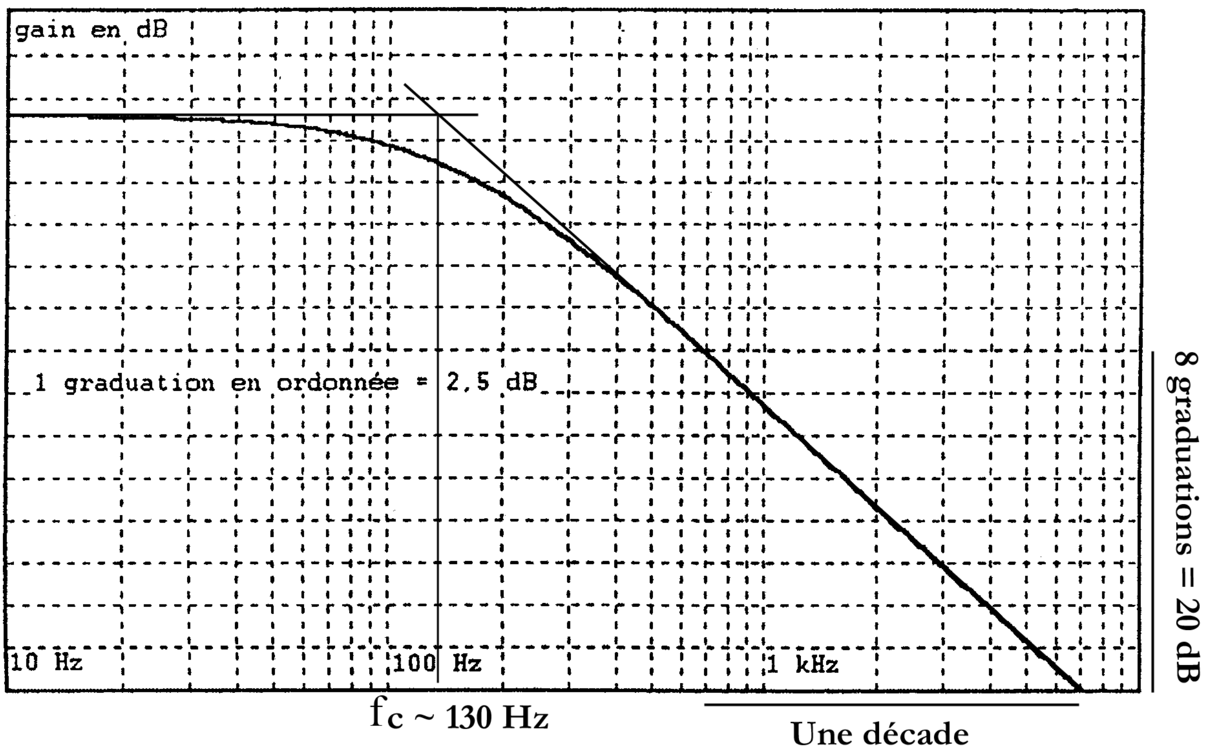
$$H(\omega_c) = \frac{H_{max}}{\sqrt{2}} \quad \Leftrightarrow \quad G_{dB}(\omega_c) = G_{dB}(max) - 3dB$$

Et puisque $H = |\underline{H}| = \dfrac{1}{\sqrt{4 + x^2}}$ et que $H_{max} = \dfrac{1}{2}$ on en déduit :

$$20\log\frac{1}{\sqrt{4 + x_c^2}} = 20\log\frac{1}{2} - 3\ dB \quad \Leftrightarrow \quad -10\log(4 + x_c^2) = -10\log 4 - 10\log 2 = -10\log 8$$

1 *pts* On trouve : $x_c^2 = 4$ et donc $\boxed{\omega_c = \dfrac{2}{RC}}$.

II.4 Le filtre étant un Passe Bas du premier ordre, ω_c est l'intersection des deux asymptotes à la courbe de gain, l'ABF étant horizontale d'équation $G_{dB}(ABF) = -6\ dB$ et l'AHF étant une droite d'équation $G_{dB}(AHF) = -20\log\dfrac{\omega}{\omega_c} - 6\ dB$.



1 *pts* • On trouve graphiquement : $\boxed{f_c = \dfrac{\omega_c}{2\pi} = \dfrac{1}{\pi RC} \simeq 130\ Hz \sim 150\ Hz}$,

1 *pts* • soit : $\boxed{RC \sim \dfrac{1}{\pi f_c} = 2.10^{-3}\ s.}$.

II.5 • Si le filtre se comporte comme un intégrateur, alors $s(t) = \pm\omega_c \int e(t)dt$, soit $\dfrac{\underline{S}}{\underline{E}} = \pm\dfrac{1}{jx}$.

1 *pts* Or, $\underline{H} = \dfrac{1}{2 + jx} \simeq \dfrac{1}{jx}$ pour les Hautes Fréquences ($x \gg 1$).

$\hookrightarrow$ Donc **le filtre se comporte comme un intégrateur en Hautes Fréquences**.

• On vérifie cette propriété sur le diagramme de Bode en constatant que la pente de l'AHF est
0,5 *pts* de $-20\ dB/dec$, **pente caractéristique de l'Intégrateur Idéal**.

(Puisque si $\underline{H} = \dfrac{1}{jx}$, alors $G_{dB} = 20\log H = -20\log x$).

• L'argument de la fonction de transfert est le déphasage de la tension de sortie par rapport à la tension d'entrée :

$$\arg(\underline{H}) = \phi = \varphi_s - \varphi_e = -\arg(2+jx) = -\arctan\frac{x}{2} \longrightarrow -\frac{\pi}{2} \quad \text{pour} \quad x \gg 1$$

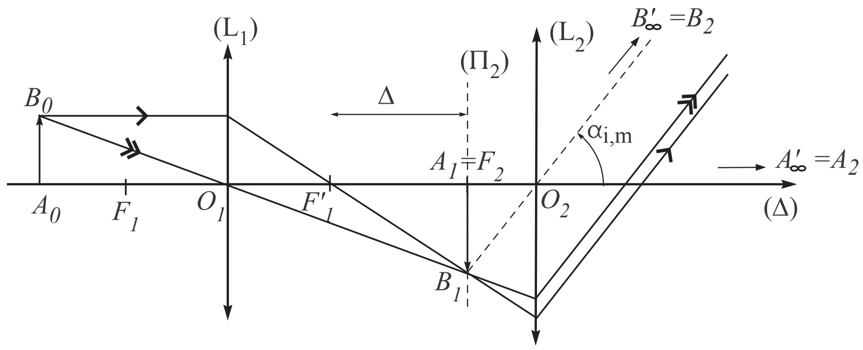
0,5 *pts* $\hookrightarrow$ **Aux HF, $s(t)$ est en quadrature retard de phase par rapport à $e(t)$.**

9 *pts*

III – Le microscope – ICNA 2004

III.1 $A_0B_0 \xrightarrow{\mathcal{L}_1} A_1B_1 \xrightarrow{\mathcal{L}_2} A_2B_2 = A_\infty B_\infty$

• Explications : Puisque l'œil est normal et accommode à l'infini, l'objet observé à travers le microscope doit être à l'infini.
Donc, A_2B_2, image de A_1B_1 par la seconde lentille est à l'infini.
Donc A_1B_1, image de $\mathcal{L}_1$ et objet de $\mathcal{L}_2$, doit être dans le plan focal objet de la seconde lentille.



1 *pt* $\rightarrow$ D'où $\boxed{A_1 = F_2}$.

• On a donc : $A_0 \xrightarrow{\mathcal{L}_1} A_1 = F_2$, soit : $\dfrac{1}{\overline{O_1F_2}} - \dfrac{1}{\overline{O_1A_0}} = \dfrac{1}{f'_1}$.

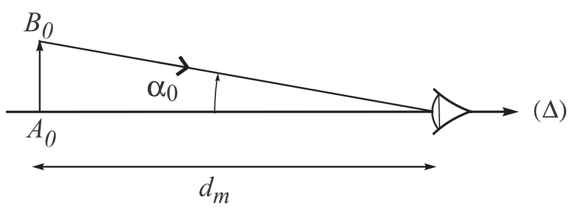
Avec : $\overline{O_1F_2} = \overline{O_1F'_1} + \overline{F'_1F_2} = f'_1 + \Delta$, d'où : $\dfrac{1}{p_0} = \dfrac{1}{f'_1+\Delta} - \dfrac{1}{f'_1} = \dfrac{-\Delta}{f'_1\,(f'_1+\Delta)}$.

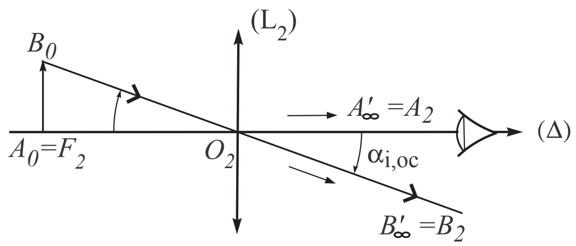
1 *pt* $\rightarrow$ Réponse **1.d)** : $\boxed{p_0 = \overline{O_1A_0} = -\dfrac{f'_1\,(f'_1+\Delta)}{\Delta}}$.

III.2 Cf. figure + Théorème de Thalès : $\gamma_{ob} \equiv \dfrac{\overline{A_1B_1}}{\overline{A_0B_0}} = -\dfrac{\overline{F'_1A_1}}{f'_1}$.

1 *pt* $\rightarrow$ Réponse **2.c)** : $\boxed{\gamma_{ob} = -\dfrac{\Delta}{f'_1}}$.

III.3 Dans les conditions de Gauss, on a, en tenant compte du schéma de l'énoncé qui imposait une orientation trigonométrique positive des angles dans le plan :





$$\alpha_0 \simeq \tan\alpha_0 = -\frac{\overline{A_0B_0}}{d_m} < 0 \qquad \text{et} \qquad \alpha_{i,oc} \simeq \tan\alpha_{i,oc} = -\frac{\overline{A_0B_0}}{f_2'} < 0.$$

1 *pt* → <u>Réponse **3.a)** :</u> $\boxed{G_{oc} = \frac{\alpha_{i,oc}}{\alpha_0} = \frac{d_m}{f_2'}}$

III.4 $G_m = \frac{\alpha_{i,m}}{\alpha_0}$ en introduisant la notation $\alpha_{i,m}$ appropriée sur le schéma effectué en **1)** .

Dès lors, on a toujours $\alpha_0 \simeq -\frac{\overline{A_0B_0}}{d_m} < 0$ et $\alpha_{i,m} \simeq \tan\alpha_{i,m} = -\frac{\overline{A_1B_1}}{f_2'} > 0$.

$$G_m = \left(-\frac{d_m}{\overline{A_0B_0}}\right)\left(-\frac{\overline{A_1B_1}}{f_2'}\right) = \frac{d_m}{f_2'}\gamma_{ob} = -G_{oc}\frac{\Delta}{f_1'} \qquad \text{d'après } \mathbf{2)} \text{ et } \mathbf{3)}$$

1 *pt* → <u>Réponse **4.b)** :</u> $\boxed{G_m = -G_{oc}\frac{\Delta}{f_1'}}$

III.5 Attention: Comme toujours dans des questions de ce genre, il faut réfléchir avant de se lancer. Ainsi, comme, par définition, la puissance du microscope est le rapport de deux grandeurs positives ($\alpha_{i,m} > 0$ comme le montre la figure en **1)** et $\overline{A_0B_0} > 0$ d'après l'orientation du plan), on en déduit que la puissance est une grandeur POSITIVE.

$$\mathcal{P} = \frac{\alpha_{i,m}}{\overline{A_0B_0}} = \frac{\alpha_{i,m}}{\alpha_0}\frac{\alpha_0}{\overline{A_0B_0}} = G_m\frac{-1}{d_m} = +G_{oc}\frac{\Delta}{f_1'}\frac{1}{d_m}$$

1 *pt* Comme $G_{oc} = \frac{d_m}{f_2'}$ → <u>Réponse **5.a)** :</u> $\boxed{\mathcal{P} = \frac{\Delta}{f_2'f_1'}}$

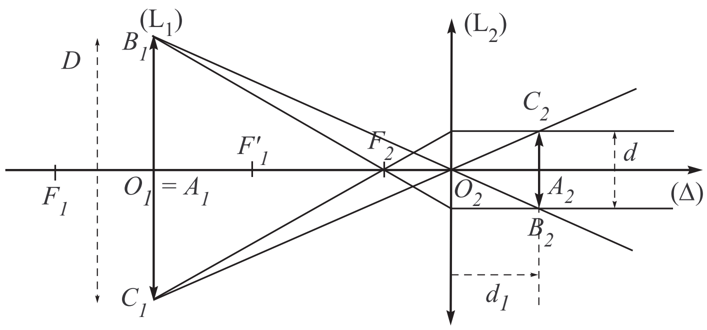
III.6 Le «**cercle oculaire**» est l'image par l'oculaire de la monture C_1B_1 de l'objectif.

$$C_1A_1B_1 \xrightarrow{\mathcal{L}_2} C_2A_2B_2$$

1 *pt* $\frac{1}{\overline{O_2A_2}} - \frac{1}{\overline{O_2A_1}} = \frac{1}{f_2'}$, où on a :

$\overline{O_2A_1} = \overline{O_2F_2} + \overline{F_2F_1'} + \overline{F_1'A_1}$,

avec $A_1 \equiv O_1$, soit :



$$\frac{1}{\overline{O_2A_2}} = \frac{1}{f_2'} + \frac{1}{-(f_2'+\Delta+f_1')} = \frac{f_1'+\Delta}{f_2'\,(f_1'+f_2'+\Delta)}$$

1 *pt* → <u>Réponse **6.c)** :</u> $\boxed{d_1 \equiv \overline{O_2A_2} = f_2'\frac{f_1'+f_2'+\Delta}{f_1'+\Delta}}$.

III.7 La monture de l'objectif (de dimension $C_1B_1 = D$) donne par l'oculaire le cercle oculaire (de dimension $C_2B_2 = d$).

- Le grandissement transversal de l'oculaire est, par définition : $\gamma_{oc} \equiv \frac{\overline{C_2B_2}}{\overline{C_1B_1}} = -\frac{d}{D}$ (1).
- Par ailleurs, le grandissement transversal peut s'exprimer avec l'origine au centre : $\gamma_{oc} \equiv \frac{\overline{C_2B_2}}{\overline{C_1B_1}} = \frac{\overline{O_2A_2}}{\overline{O_2A_1}} = -\frac{d_1}{f_1'+f_2'+\Delta}$ (2).
- 1 *pt* En réunissant les relations (1), (2) et l'expression de d_1 obtenue en **6)** , on trouve :

$$-\frac{d}{D} = -\frac{f_2'}{f_1'+\Delta} \qquad \rightarrow \qquad \underline{\text{Réponse } \mathbf{7.d)} :}\ \boxed{d = D\,\frac{f_2'}{f_1'+\Delta}}$$

$9\ pts + 2$ IV – Quantification du moment cinétique : l'atome de BOHR

• Système étudié : $\{M, m, -e\}$, électron dans le référentiel lié au proton, supposé galiléen, $\mathcal{R}_g$.
• Bilan des forces : le poids et l'interaction électrostatique exercée par le proton (O). Le poids étant négligeable devant cette dernière force, on a :

$$\overrightarrow{F}_{ext} = \overrightarrow{F} = \frac{-e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}\overrightarrow{e_r}.$$

2 pts **IV.1** • Le **P**rincipe **F**ondamental de la **D**ynamique appliqué à l'électron donne :

$$m_e \overrightarrow{a}_{M/\mathcal{R}_g} = \frac{-e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}\overrightarrow{e_r}$$

• La base adaptée à une trajectoire circulaire ($r = Cste$) et plane est la base polaire $(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta})$.

L'accélération de l'électron dans cette base est : $\overrightarrow{a}_{M/\mathcal{R}_g} = -r\dot{\theta}^2\overrightarrow{e_r} + r\ddot{\theta}\overrightarrow{e_\theta} = -\frac{v^2}{r}\overrightarrow{e_r} + \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{e_\theta}$

Le P.F.D. s'écrit donc : $-\frac{v^2}{r}\overrightarrow{e_r} + \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{e_\theta} = \frac{-e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}\overrightarrow{e_r}$, soit :

↪ En projection selon $\overrightarrow{e_\theta}$: $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 0 \Leftrightarrow \boxed{v = r\dot{\theta} = Cste}$: l'électron a un **mouvement circulaire uniforme** autour du noyau.

↪ En projection selon $\overrightarrow{e_r}$: $-\frac{v^2}{r} = \frac{-e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \Leftrightarrow \boxed{v = \frac{e}{\sqrt{4\pi\epsilon_0 m_e r}}}$ ①

3 pts **IV.2** • L'énergie cinétique de l'électron dans $\mathcal{R}_g$ est : $\boxed{\mathcal{E}_k(M) = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r} = \mathcal{E}_k(r)}$

• Pour déterminer l'énergie potentielle électrostatique, il faut revenir au travail élémentaire fourni par la force électrostatique $\overrightarrow{F}$:

$$\delta W(\overrightarrow{F}) = \overrightarrow{F}\,.\,\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}\overrightarrow{e_r}\,.\,(\mathrm{d}r\overrightarrow{e_r} + r\mathrm{d}\theta\overrightarrow{e_\theta}) = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}\mathrm{d}r = -\mathrm{d}\mathcal{E}_p(r)$$

D'où : $\mathcal{E}_p(r) = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} + Cste$, soit, en prenant $\mathcal{E}_p(r \to \infty) = 0$: $\boxed{\mathcal{E}_p(r) = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} = -2\mathcal{E}_k(r)}$

• L'énergie totale de l'électron est donc : $\boxed{\mathcal{E}(r) = \mathcal{E}_k(r) + \mathcal{E}_p(r) = -\mathcal{E}_k(r) = \frac{\mathcal{E}_p(r)}{2} = -\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r}}$ $(\star)$

2 pts **IV.3** • L'expression du moment cinétique de l'électron dans $\mathcal{R}_g$ évalué en O est :

$$\overrightarrow{L}_{O/\mathcal{R}_g}(M) = \overrightarrow{OM} \times m_e\overrightarrow{v} = r\overrightarrow{e_r} \times m_e v\overrightarrow{e_\theta} = m_e r v\overrightarrow{e_z}.$$

• Or, ce moment cinétique est quantifié, d'expression : $L_O(M) = m_e r v = n\frac{h}{2\pi}$,

d'où la vitesse de l'électron : $\boxed{v = n\frac{h}{2\pi m_e r}}$ ②

2 pts **IV.4** ① et ② permettent d'écrire : $v = \frac{e}{\sqrt{4\pi\epsilon_0 m_e r}} = n\frac{h}{2\pi m_e r}$

• Cette équation permet d'établir les rayons des trajectoires circulaires stables de l'électron autour du noyau : $\boxed{r = n^2\frac{\epsilon_0 h^2}{\pi m_e e^2} \equiv n^2 r_0}$ ③

• On en déduit la rayon de BOHR qui correspond à la trajectoire de l'électron dans son état fondamental $n = 1$: $\boxed{r_0 = \frac{r}{n^2} = \frac{\epsilon_0 h^2}{\pi m_e e^2} = 53\,pm}$.

(2 pts) **IV.5** $(\star) \xrightarrow{③} \mathcal{E}(r) = -\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r} = -\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0}\frac{1}{n^2}\frac{\pi m_e e^2}{\epsilon_0 h^2}$.

Ainsi : $\boxed{\mathcal{E}(r) = -\frac{\mathcal{E}_0}{n^2}}$ avec $\boxed{\mathcal{E}_0 = \frac{m_e e^4}{8\epsilon_0^2 h^2} = 13{,}6\ eV}$ ④.

Pour la suite et la fin de cet exercice, cf. **TD9**.