

CORRECTION DU DEVOIR SURVEILLÉ

n°5ter

I – Filtre Passe-Bande d'ordre 2

I.1 • Comme l'amplificateur opérationnel est idéal : $i_+ = i_- = 0$ et parce qu'il fonctionne en régime linéaire : $V_{E-} = V_{E+} = V_M \equiv 0$.

• On utilise la notation complexe puisque le régime est sinusoïdal.

• La loi des Nœuds en termes de potentiels en E_- s'écrit :

$$\frac{v_e - V_{E-}}{R} + \frac{v_s - V_{E-}}{R} + \frac{v_s - V_{E-}}{jL\omega} + \frac{v_s - V_{E-}}{\frac{1}{jC\omega}} + 0 = 0$$

soit : $v_s \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{jL\omega} + jC\omega \right) = -\frac{v_e}{R} \Leftrightarrow$

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{v_s}{v_e} = \frac{-1}{1 + jRC\omega + \frac{R}{jL\omega}} = \frac{-j\frac{L\omega}{R}}{1 + j\frac{L\omega}{R} + LC(j\omega)^2}$$

I.2 • La fonction de transfert $\underline{H}(j\omega)$ peut se mettre sous la forme :

$$\underline{H}(j\omega) = H_0 \frac{j\frac{x}{Q}}{1 + j\frac{x}{Q} + (jx)^2} = H_0 \frac{1}{1 + jQ \left(x - \frac{1}{x} \right)}$$

Avec :

$x = \frac{\omega}{\omega_0}$

$H_0 = -1$

$\omega_0 \equiv \frac{1}{\sqrt{LC}} \Leftrightarrow f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$

$Q = \frac{R}{L\omega_0} = RC\omega_0 = R\sqrt{\frac{C}{L}}$

• Pour $R = 2 \text{ k}\Omega$, $L = 0,1 \text{ H}$ et $C = 100 \text{ nF}$, on obtient : $f_0 \simeq 1590 \text{ Hz}$ et $Q = 2$.

I.3 On a $H = |H| = \frac{|H_0|}{\sqrt{1 + Q^2 \left(x - \frac{1}{x} \right)^2}}$, qui est maximum pour $x = 1 \Leftrightarrow f_m = f_0$.

Alors $H_{max} = H(x = 1) = |H_0| = 1 \Leftrightarrow G_{dB}(max) = 20 \log H_{max} = 0 \text{ dB}$.

I.4 Lorsqu'on travaille à une des fréquences de coupure :

$$H_c = \frac{H_{max}}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2 \left(x - \frac{1}{x} \right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow 1 + Q^2 \left(x - \frac{1}{x} \right)^2 = 2 \Leftrightarrow x^2 \mp \frac{1}{Q}x - 1 = 0$$

Il faut chercher les deux racines réelles positives de ces deux polynômes de discriminant commun $\Delta = \frac{1}{Q^2} + 4 > 0$.

Pour le polynôme $x^2 + \frac{1}{Q}x - 1 = 0$, on a

$x_1 = -\frac{1}{2Q} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2} > 0$

$x_3 = -\frac{1}{2Q} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2} < 0$

Pour le polynôme $x^2 - \frac{1}{Q}x - 1 = 0$, on a

$x_2 = \frac{1}{2Q} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2} > 0$

$x_4 = \frac{1}{2Q} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2} < 0$

On en déduit :

$$f_{c1} = f_0 x_1 = f_0 \left(-\frac{1}{2Q} + \sqrt{\frac{1}{4Q^2} + 1} \right) \simeq 1240 \text{ Hz} \quad f_{c2} = f_0 x_2 = f_0 \left(\frac{1}{2Q} + \sqrt{\frac{1}{4Q^2} + 1} \right) \simeq 2040 \text{ Hz}$$

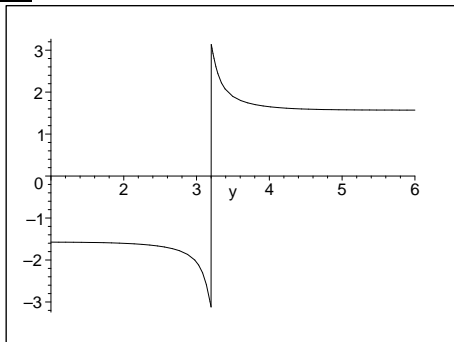
I.5 Comme $G_{dB} = 20 \log H = -10 \log \left[1 + Q^2 \left(x - \frac{1}{x} \right)^2 \right]$, on en déduit que :

- pour $x \ll 1$, $G_{dB}(ABF) = -20 \log Q + 20 \log x$: droite de pente $+20 \text{ dB/dec}$ et d'ordonnée à l'origine $-20 \log Q$.
- pour $x \gg 1$, $G_{dB}(AHF) = -20 \log Q - 20 \log x$: droite de pente -20 dB/dec et d'ordonnée à l'origine $-20 \log Q$.
- Dans un diagramme semi-logarithmique avec « $\log f$ » en abscisse, ces deux asymptotes se coupent en $(\log f_0, -20 \log Q)$.

I.6 $\varphi = \varphi_s - \varphi_e = \arg(\underline{H}) = \underbrace{\arg(H_0)}_{\pm\pi} - \arg \left[1 + jQ \left(x - \frac{1}{x} \right) \right] = \pm\pi - \arctan \left[Q \left(x - \frac{1}{x} \right) \right]$, soit :

- pour $0 < x < 1 \Leftrightarrow f < f_0$: $\varphi = -\pi - \arctan Q \left(x - \frac{1}{x} \right) \in \left] -\pi, -\frac{\pi}{2} \right]$ et $\varphi(ABF) = -\frac{\pi}{2}$
- pour $x > 1 \Leftrightarrow f > f_0$: $\varphi = +\pi - \arctan Q \left(x - \frac{1}{x} \right) \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi \right[$ et $\varphi(AHF) = \frac{\pi}{2}$
- $\varphi(f = 500 \text{ Hz}) \simeq -100^\circ$ et $\varphi(f = 3000 \text{ Hz}) \simeq +110^\circ$.

I.7 Tracé de $\varphi(rd)$ en fonction de « $\log f$ ».



I.8 • On conserve $L = 0,1 \text{ H}$. On a vu que la fréquence propre correspond à la valeur pour laquelle le gain est maximal. Grâce à la courbe, on trouve $D_{dB}(max) = 0 \text{ dB} \Leftrightarrow f'_0 \simeq 16\,000 \text{ Hz}$

- On en déduit que $C' = \frac{1}{L4\pi^2 f_0'^2} \simeq 0,99 \text{ nF} \simeq 1 \text{ nF}$

I.9 • Les fréquences de coupure correspondent aux fréquences associées aux points d'intersection de la courbe de réponse en gain G_{dB} et de la droite horizontale d'équation $G_{dB}(max) - 3 \text{ dB}$.

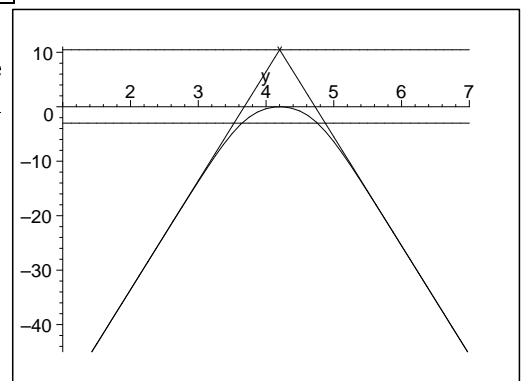
Par lecture graphique on trouve :

$$f_{c1} \simeq 4500 \text{ Hz} \quad \text{et} \quad f_{c2} \simeq 58\,000 \text{ Hz} \sim 60\,000 \text{ Hz}$$

- Or, pour un filtre passe-bande d'ordre 2 on a (cf. 4) :

$$\frac{f_{c2} - f_{c1}}{f'_0} = \frac{1}{Q} \Leftrightarrow Q' = \frac{f'_0}{\Delta f'} \simeq 0,3$$

- Comme $Q' = \frac{R'}{L2\pi f'_0}$, on en déduit $R' = 2\pi Q' L f'_0 \simeq 3 \text{ k}\Omega$.



I.10 D'après la question 5), l'intersection des asymptotes a pour ordonnée $-20 \log Q$.

Par lecture graphique, on trouve $-20 \log Q' \simeq 10,5 \text{ dB} \Leftrightarrow Q' \simeq 10^{-\frac{10,5}{20}} \simeq 0,3$

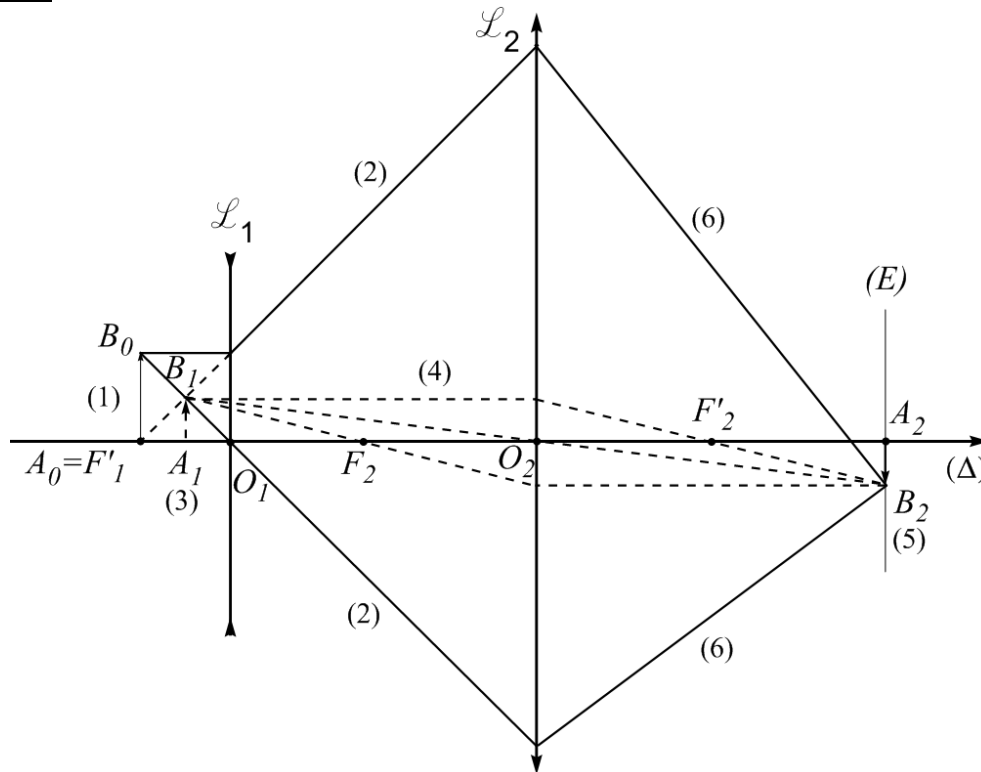
II – ENAC 2005, q.14-18 [9pts]**II.1** $A_0B_0 \xrightarrow{\mathcal{L}_1} A_1B_1$, donc :

$$G_t = \frac{1}{2} \equiv \frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{A_0B_0}} = \frac{\overline{F_1A_1}}{\overline{F_1A_0}} = \frac{f'_1}{\overline{F_1A_0}}$$

$$\text{D'où : } \boxed{\overline{O_1A_0} = \overline{O_1F_1} + \overline{F_1A_0} = f'_1 \left(-1 + \frac{1}{G_t} \right) = -20 \text{ cm}} \quad \text{R ep. A)}$$

II.2 Comme on a aussi $G_t = \frac{\overline{O_1A_1}}{\overline{O_1A_0}}$, on obtient $\boxed{\overline{O_1A_1} = G_t \overline{O_1A_0} = -10 \text{ cm}}$ **R ep. B)****II.3** $A_0B_0 \xrightarrow{\mathcal{L}_1} A_1B_1 \xrightarrow{\mathcal{L}_2} A_2B_2 = EB_2$, avec $\overline{O_2E} = 80 \text{ cm}$.En appliquant le relation de DESCARTES pour la lentille \mathcal{L}_2 , $\frac{1}{\overline{O_2E}} - \frac{1}{\overline{O_2A_1}} = \frac{1}{f'_2}$, on obtient :

$$\overline{O_2A_1} = \frac{f'_2 \overline{O_2E}}{f'_2 - \overline{O_2E}}, \text{ soit : } \boxed{\overline{O_1O_2} = \overline{O_1A_1} - \frac{f'_2 \overline{O_2E}}{f'_2 - \overline{O_2E}} = 70 \text{ cm}} \quad \text{R ep. C)}$$

II.4**II.5** On d esire qu'un objet à l'infini sur l'axe optique soit le conjugué d'une image à l'infini sur l'axe optique (système afocal) ; soit : $A_\infty \xrightarrow{\mathcal{L}_1} F'_1 = F_2 \xrightarrow{\mathcal{L}_2} A'_\infty$.

$$\text{On en déduit : } \boxed{\overline{O_1O_2} = \overline{O_1F'_1} + \overline{F_2O_2} = f'_1 + f'_2 = 20 \text{ cm}} \quad \text{R ep. D) .}$$

II.6 Un simple schéma de l' tendeur de faisceau, ainsi que la simple application du théorème de THALÈS sur deux triangle homologues de sommet commun $F'_1 = F_2$ et de côtés opposés $O_2I = D$ et $O_1J = d$ donne :

$$\boxed{\frac{D}{d} = \frac{O_2I}{O_1J} = \frac{F_2O_2}{F'_1O_1} = \frac{|f'_2|}{f'_1} = 2} \quad \text{R ep. B) .}$$

III – Satellite géostationnaire

III.1 • Système étudié : $\{M, m\}$, satellite de la Terre étudié le référentiel géocentrique supposé galiléen \mathcal{R}_G .

• Bilan des forces : la seule force appliquée à M est la force gravitationnelle :

$$\vec{F}_{ext} = \vec{F} = -\mathcal{G} \frac{M_T m}{r^2} \vec{e}_r = -\mathcal{G} \frac{M_T m}{r^3} \overrightarrow{OM}$$

• Cette force est **conservative**, dérivant de l'énergie potentielle gravitationnelle :

$$\mathcal{E}_{p, grav} = -\mathcal{G} \frac{M_T m}{r} \quad (\text{en choisissant l'origine de l'énergie potentielle pour } r \rightarrow \infty).$$

• Cette force est également **centrale**, donc $\mathcal{M}_O(\vec{F}) = \overrightarrow{OM} \times \vec{F} = \vec{0}$.

↪ le théorème du moment cinétique appliqué en O dans \mathcal{R}_G conduit donc à :

$$\left(\frac{d\vec{L}_{O/\mathcal{R}_G}(M)}{dt} \right)_{\mathcal{R}_G} = \mathcal{M}_O(\vec{F}) = \vec{0} \Leftrightarrow \boxed{\vec{L}_{O/\mathcal{R}_G}(M) = Cste}$$

• Comme $\forall t \quad \vec{L}_{O/\mathcal{R}_G}(M) \perp \mathcal{T} = (\overrightarrow{OM}, \vec{v}_{M/\mathcal{R}_G})$, on en déduit que la trajectoire (constituée par l'ensemble des points M contenus dans les plans \mathcal{T}) est tout le temps orthogonale à une direction constante qui celle de $\vec{L}_{O/\mathcal{R}_G}$ – qu'on peut librement choisir selon \vec{e}_z .

Dès lors, la trajectoire de M est contenue dans le plan (Oxy) .

III.2 • Pour le point matériel M en mouvement circulaire dans le référentiel géocentrique, le Principe Fondamental de la **Dynamique** s'écrit :

$$m \vec{a}_{M/\mathcal{R}_G} = \vec{F} \Leftrightarrow m(-r\dot{\theta}^2 \vec{e}_r + r\ddot{\theta} \vec{e}_\theta) = -\mathcal{G} \frac{M_T m}{r^2} \vec{e}_r, \text{ soit :}$$

$$\begin{cases} -m \frac{v^2}{r} = -\mathcal{G} \frac{M_T m}{r^2} & \textcircled{1} \\ m \frac{dv}{dt} = 0 & \textcircled{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \textcircled{2} \rightarrow \boxed{v = v_0 = ctse} \\ \textcircled{1} \rightarrow \boxed{v_0 = \sqrt{\frac{\mathcal{G} M_T}{r}}} \end{cases} \text{ Mvmt circulaire } \mathbf{uniforme}$$

• À la surface de la Terre, si l'on assimile le champ de pesanteur au champ gravitationnel : $mg_0 \approx \mathcal{G} \frac{M_T m}{R_T^2}$, d'où : $\boxed{\mathcal{G} M_T \approx g_0 R_T^2}$.

$$\text{Alors : } \boxed{v_0 = R_T \sqrt{\frac{g_0}{r}} = R_T \sqrt{\frac{g_0}{R_T + h}} = 7,44 \text{ km.s}^{-1}}$$

III.3 • Le satellite n'étant soumis qu'à une force conservative, le **Théorème de l'énergie mécanique** s'écrit :

$$d\mathcal{E}_m = \delta W_{NC} = 0 \Leftrightarrow \mathcal{E}_m = Cste$$

$$\text{Or : } \mathcal{E}_k = \frac{1}{2} m v^2 = cste = \frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} \mathcal{G} \frac{M_T m}{r} \Leftrightarrow \boxed{\mathcal{E}_k = cste = -\frac{1}{2} \mathcal{E}_{p, grav}}$$

$$\text{D'où : } \boxed{\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_k + \mathcal{E}_{p, grav} = -\mathcal{E}_k = -\frac{1}{2} \mathcal{G} \frac{M_T m}{r}}$$

III.4 • Lorsque le satellite est posé sur la Terre en un point de latitude λ , son énergie mécanique dans le référentiel géocentrique se compose :

◦ de l'énergie cinétique d'un point matériel M en rotation de rayon $\rho = R_T \cos \lambda$ autour de l'axe des pôles à la vitesse angulaire Ω : $\mathcal{E}_k = \frac{1}{2} m v_{M/\mathcal{R}_G}^2 = \frac{1}{2} m (\rho \Omega)^2$, soit : $\boxed{\mathcal{E}_k = \frac{1}{2} m \left(\frac{2\pi}{T} R_T \cos \lambda \right)^2}$

◦ de l'énergie potentielle gravitationnelle qui est inversement proportionnelle à la distance du satellite au centre de force ($r = OM = R_T$ dans ce cas) : $\boxed{\mathcal{E}_{p, grav} = -\mathcal{G} \frac{M_T m}{R_T}}$

$$\rightarrow \text{D'où : } \boxed{\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_0 = \frac{1}{2} m \left(\frac{2\pi}{T} R_T \cos \lambda \right)^2 - \mathcal{G} \frac{M_T m}{R_T}}$$

$$\bullet \quad v_{sol}(\lambda = 0) = \frac{2\pi}{T} R_T = 0,46 \text{ km.s}^{-1}$$

III.5 Le plan de la trajectoire circulaire du satellite M doit contenir le centre de force O (cf. **1**).

Pour qu'un satellite géostationnaire soit toujours au-dessus d'un même point de la surface terrestre, il est impératif que le plan de sa trajectoire circulaire soit orthogonale à l'axe des pôles.

Conclusion : **tous les satellites géostationnaires sont contenus dans le plan de l'Équateur.**

III.6 • Un satellite géostationnaire doit tourner dans le plan de l'équateur (cf. **5**) sur un cercle de rayon r_G avec la même vitesse angulaire Ω que la Terre (de manière à être en permanence au-dessus du même point de la surface de la Terre) : $v_G = r_G \Omega = r_G \frac{2\pi}{T}$.

• Comme, par ailleurs, cette vitesse s'écrit également (cf. **2**) : $v_G = \sqrt{\frac{\mathcal{G}M_T}{r_G}}$, on en déduit la **troisième loi de KÉPLER** :

$$v_G = \sqrt{\frac{\mathcal{G}M_T}{r_G}} = r_G \frac{2\pi}{T} \Leftrightarrow \frac{T^2}{r_G^3} = \frac{4\pi^2}{\mathcal{G}M_T}$$

• Sachant que $r_G = R_T + h_G$, on en déduit l'altitude d'un satellite géostationnaire :

$$r_G = \left(\frac{T^2 \mathcal{G}M_T}{4\pi^2} \right)^{1/3} = 42\,170 \text{ km} \Leftrightarrow h_G = r_G - R_T = 35\,800 \text{ km}$$

• La vitesse de rotation du satellite géostationnaire est :

$$v_G = r_G \Omega = (R_T + h_G) \frac{2\pi}{T} = 3,07 \text{ km.s}^{-1}$$

ces résultat son indépendant de la masse du satellite géostationnaire considéré. On retiendra que l'altitude de l'orbite géostationnaire est $\sim 36\,000 \text{ km}$.

III.7 • L'énergie mécanique du satellite TELECOM en orbite géostationnaire dans le référentiel géocentrique est :

$$\mathcal{E}_{mG} = \underbrace{\frac{1}{2} m v_G^2}_{4,7 \cdot 10^9 \text{ J}} - \underbrace{\mathcal{G} \frac{M_T m}{r_G}}_{9,4 \cdot 10^9 \text{ J}} = -4,7 \cdot 10^9 \text{ J}$$

• Cette grandeur est à comparer avec l'énergie mécanique du satellite immobile à la surface de la Terre :

$$\mathcal{E}_{m0} = \underbrace{\frac{1}{2} m \left(\frac{2\pi}{T} R_T \right)^2}_{0,1 \cdot 10^9 \text{ J}} - \underbrace{\mathcal{G} \frac{M_T m}{R_T}}_{62,6 \cdot 10^9 \text{ J}} = -62,5 \cdot 10^9 \text{ J}$$