

DEVOIR SURVEILLÉ n° 6

«Si quelqu'un te dit : j'ai peiné [dans l'étude] et je n'ai pas trouvé, ne [le] crois pas ;
[si quelqu'un te dit] : je n'ai pas peiné et j'ai trouvé, ne le crois pas ;
[si quelqu'un te dit] : j'ai peiné et j'ai trouvé, crois-le.»

RABBI YITS'HAQ – TB, traité Méguila 6a

Partie A : Mécanique

I – Étoile double

De nombreuses étoiles sont associées en couple (ou doublet) et ces étoiles dites doubles occupent une place de choix dans l'astronomie d'observation, car elles offrent un moyen direct de mesure des masses stellaires.

Les deux étoiles formant le doublet \mathcal{S} sont assimilées à deux points matériels M_1 et M_2 de masses respectives m_1 et m_2 en mouvement dans un référentiel \mathcal{R}_g galiléen. Chacun des deux éléments n'est soumis qu'à la force de gravitation exercée par l'autre.

L'étude de \mathcal{S} est effectuée dans le référentiel \mathcal{R}^* du centre d'inertie G des deux masses. On notera :

- la masse réduite : $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$
- la position relative de M_2 par rapport à M_1 : $\vec{r} = \overrightarrow{M_1 M_2}$
- la vitesse relative de M_2 par rapport à M_1 : $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$

I.1 Rappeler la définition du référentiel barycentrique \mathcal{R}^* du système des deux étoiles. Est-il en général galiléen? Justifier qu'il galiléen avec les hypothèses adoptées pour l'étoile double? (Votre rédaction devra être précise et complète).

I.2 Établir, pour le système étudié, le principe et l'intérêt de la réduction canonique du problème à deux corps.

I.3 Établir que le mouvement de M_1 et celui de M_2 sont dans un même plan contenant G – qu'on pourra appeler (Gxy).

Pour ce faire : établir (entre autre) que le moment cinétique barycentrique du système est égal au moment cinétique de la particule réduite évaluée en G dans \mathcal{R}^* .

I.4 Les deux étoiles Alpha et Bêta, composantes de l'étoile double, décrivent des orbites circulaires de centre G et de rayons respectifs r_1 et r_2 .

Pourquoi ces deux étoiles ont-elles la même période de révolution T_0 autour de G ?

Établir l'expression de la période orbitale T_0 de chaque étoile en fonction de \mathcal{G} , m_1 , m_2 et $r = r_1 + r_2$.

I.5 Déterminer les masses m_1 et m_2 des deux étoiles sachant que :
 $\mathcal{G} = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N.m}^2.\text{kg}^{-2}$; $r_1 = 1,0 \cdot 10^9 \text{ km}$; $r_2 = 5,0 \cdot 10^8 \text{ km}$; $T_0 = 44,5 \text{ ans}$.

I.6 Faire un schéma dans le plan (Gxy) représentant le système \mathcal{S} et la particule réduite dans le repère cartésien lié à \mathcal{R}^* en respectant le rapport des masses m_1 et m_2 calculées à la question précédente.

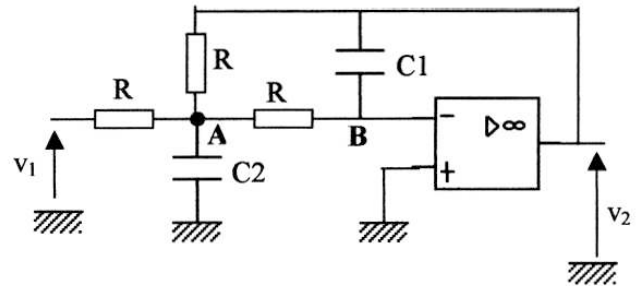
- On fera apparaître le vecteur moment cinétique du système,
- ainsi que les trajectoire des trois points (M_1 , M_2 et la particule réduite M).
- On fléchera les trajectoire dans le sens du mouvement choisi,
- on représentera les vecteurs vitesses des trois points
- ainsi que la base locale utile au point M .

Partie B : Électrocinétique

II – Filtre de RAUCH (Banque PT 2006)

Pour obtenir la valeur moyenne d'un signal $v_1(t)$ on utilise un filtre passe-bas réalisé à l'aide d'un amplificateur opérationnel que l'on supposera idéal et en régime linéaire.

Le schéma correspond à une structure dite «de RAUCH». On travaille en régime sinusoïdal.



II.1 En utilisant au point A et au point B l'expression de la loi des nœuds en termes de potentiels, établir deux relations entre V_A , V_B , V_1 et V_2 .

II.2 Déterminer la fonction de transfert : $\underline{T}(j\omega) = \frac{V_2}{V_1}$.

II.3 On cherche à mettre \underline{T} sous la forme canonique suivante : $\underline{T}(j\omega) = \frac{T_0}{1 + 2m\frac{j\omega}{\omega_0} + \left(\frac{j\omega}{\omega_0}\right)^2}$.

Déterminer T_0 . Donner deux relations entre ω_0 , m et les éléments du circuit.

II.4 On souhaite obtenir une fréquence propre $f_0 = 5 \text{ Hz}$ et un coefficient d'amortissement $m = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

On choisit $R = 470 \text{ k}\Omega$. → Calculer les valeurs des capacités C_1 et C_2 .

II.5 Pour les valeurs numériques précédentes, tracer le diagramme de BODE asymptotique (en gain et en phase) ainsi que l'allure des courbes réelles sur le document-réponse fourni en annexe.

II.6 Donner, en utilisant la seule fonction de transfert établie en **3**), l'équation différentielle reliant les tensions réelles v_1 et v_2 , équation où figurent les constantes ω_0 et m .