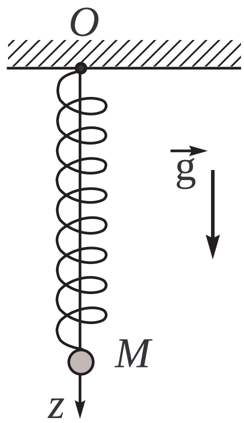
DL n^{o}10 : Oscillateur harmonique (CCP 2006, MP)

Un point matériel M de masse m pouvant se mouvoir dans la direction Oz (verticale descendante) est fixé à l'extrémité d'un ressort de raideur k et de longueur à vide l_0.
Le champ de pesanteur $\overrightarrow{g}$ est uniforme. On désigne par z la cote de M.



1.a) Écrire l'équation du mouvement du point M.

1.b) Déterminer sa position d'équilibre z_e.

1.c) En déduire l'équation du mouvement de M en fonction de la variable $Z = z - z_e$. Quelle est la pulsation propre ω_0 du système ?

1.d) Déterminer $z(t)$ sachant qu'initialement le point est abandonné sans vitesse initiale de la cote $z_0 = l_0 + \dfrac{mg}{k} + a$ (avec $a > 0$).

2.a) Exprimer l'énergie potentielle *totale* $\mathcal{E}_p(M)$ du point M connue à une constante près. Déterminer cette constante lorsqu'on impose $\mathcal{E}_p = 0$ **à l'équilibre**.

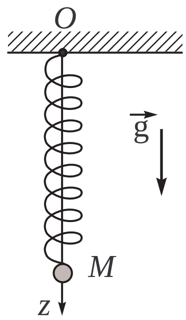
2.b) Exprimer alors l'énergie potentielle en fonction de $Z = z - z_e$ et k.

2.c) Dans le cas du mouvement du **1.d)** déterminer $< \mathcal{E}_k >$ et $< \mathcal{E}_p >$, les valeurs moyennes de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle. Quelle relation existe-t-il entre ces deux grandeurs ?

2.d) Application numérique : $k = 20\ N.m^{-1}$; $m = 100\ g$; $a = 5\ cm$.
→ Calculer la pulsation des oscillations ainsi que l'énergie potentielle moyenne.

Solution DL n^{o}10 : Oscillateur harmonique

1.a) Le point M étudié dans le référentiel terrestre considéré galiléen vérifie le PFD : $m\overrightarrow{a_M} = \overrightarrow{P} + \overrightarrow{F_r} = m\overrightarrow{g} - k(z - l_0)\overrightarrow{e_z}$
Soit, en projection selon $\overrightarrow{e_z}$: $\boxed{m\ddot{z} = mg - k(z - l_0)\ ①}$



1.b) A l'équilibre, on a donc : $0 = mg - k(z_e - l_0)$ ②, soit :
$$\boxed{z_e = l_0 + \frac{mg}{k}}.$$

1.c) En faisant ①−② et en introduisant la variable $Z = z - z_e$, on obtient :

$$\boxed{\ddot{Z} + \omega_0^2 Z = 0\ ③} \quad \text{avec} \quad \boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}}.$$

1.d) La solution de ③ est : $Z = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$,
dont la dérivée est : $\dot{Z} = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t) + B\omega_0\cos(\omega_0 t)$.
Les conditions initiales ($z_0 = z_e + a$ et $\dot{z}_0 = 0$) impliquent : $\left\{\begin{array}{lllll} Z_0 & = & a & = & A \\ \dot{Z}_0 & = & B\omega_0 & = & 0 \end{array}\right.$

D'où : $\boxed{Z(t) = a\cos(\omega_0 t)}$ → $\boxed{z(t) = a\cos(\omega_0 t) + z_e}$

2.a) On a (avec Oz descendante) : $\boxed{\mathcal{E}_p(M) = \mathcal{E}_{pg} + \mathcal{E}_{pe} = -mgz + \frac{1}{2}k(z - l_0)^2 + Cte}$

Si on impose $\mathcal{E}_p = 0$ à l'équilibre, on en déduit : $\boxed{Cte = mgz_e - \frac{1}{2}k(z_e - l_0)^2}$.

2.b) Alors : $\mathcal{E}_p = -mg(z - z_e) + \frac{1}{2}k[(z - l_0)^2 - (z_e - l_0)^2] = -mgZ + \frac{1}{2}k(z - z_e)(z + z_e - 2l_0)$

qu'on peut écrire sous la forme $\mathcal{E}_p = -mgZ + \frac{1}{2}kZ(Z + \frac{2mg}{k})$ $\rightarrow$ $\boxed{\mathcal{E}_p = \frac{1}{2}kZ^2}$

2.c) $\mathcal{E}_k = \frac{1}{2}m\dot{z}^2 = \frac{1}{2}ma^2\omega_0^2\sin^2(\omega_0 t) = \frac{ka^2}{2}\sin^2(\omega_0 t)$

$< \mathcal{E}_k >= \frac{ka^2}{2} < \sin^2(\omega_0 t) >= \frac{1}{4}ka^2$

De même, comme $< \cos^2(\omega_0 t) >=< \sin^2(w_0 t) >= \frac{1}{2}$, on en déduit : $\boxed{< \mathcal{E}_p >=< \mathcal{E}_k >= \frac{1}{4}ka^2}$

2.d) Application numérique : $\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = 14,1\ rad.s^{-1}}$ et $\boxed{< \mathcal{E}_p >= \frac{1}{4}ka^2 = 12,5\ mJ}$.