DL n°12/13

Les deux **DL** qui suivent sont la suite du **DL7** (➜ Cf Ex. Mécanique, p.23-24) qui étudiait le comportement d'une suspension sur une route plane.
→ Il faut donc avant tout revoir le **DL7**(et sa correction) pour bien comprendre ce qui va suivre !!
Le **DL13** qui traite de l'analogie électromécanique relève de l'électrocinétique : ➜ Cf Cours **E5** et **E6**.

DL n°12 – Comportement Routier d'une Automobile

Concours EIA 1999 [ATS et TSI] (suite, *)

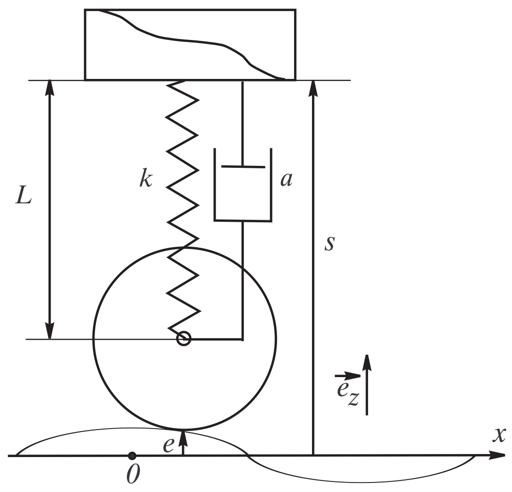
Étude de la réponse harmonique

1) On étudie maintenant le **comportement sur une route difficile** du véhicule avec ses quatre passagers de masse m chacun (soit une masse m et le quart de la masse M du châssis pour chaque suspension).
$z'_0 = s_0$ note toujours la garde au sol du châssis chargé par $4m$ sur un sol horizontal.

1.a) On modélise la route rectiligne dans la direction x par un sol ondulé sinusoïdalement autour de la côte de référence horizontale 0 suivant la relation :

$$e(x) = e_m \cos(\gamma\, x)$$

Quelle est la distance λ entre deux bosses exprimée en fonction de γ ?
Quelle est la pulsation ω des oscillations verticales imposées aux roues si le véhicule roule sur cette route à une vitesse constante V ?



1.b) On repère maintenant le châssis par sa position $s(t)$ par rapport à la côte de référence 0 liée au référentiel terrestre supposé galiléen.
Exprimer, selon $\vec{e_z}$, la force de frottement due à l'amortisseur en fonction de a, $\dot{s}$ et $\dot{e}$.
Montrer que l'équation différentielle vérifiée par $s(t)$ du châssis est de la forme :

$$\ddot{s} + \alpha'\,\dot{s} + \beta'\,s = f + \delta' \qquad (\star)$$

où f est une fonction du temps que l'on exprimera en fonction de e et de $\dot{e}$.

2) On étudie le **régime forcé permanent**.
2.a) Quelle est la signification de cette expression ?

2.b) On utilise les notations complexes : $\underline{e} = e_m\, e^{j\omega t}$ et $\underline{s} = \underline{S}\, e^{j\omega t}$, $\underline{s}$ étant la solution de l'équation :

$$\ddot{\underline{s}} + \alpha'\,\dot{\underline{s}} + \beta'\,\underline{s} = \underline{f}.$$

Expliquer pourquoi on ne tient pas compte du terme δ' dans $(\star)$ pour étudier les oscillations du châssis autour de sa position d'équilibre s_0.
Exprimer l'amplitude complexe $\underline{S}$ des oscillations du châssis en fonction de e_m, ω, α' et β'.
Puis, l'écrire sous la forme :

$$\boxed{\underline{S} = e_m \frac{1 + j\,\dfrac{\Omega}{Q}}{1 - \Omega^2 + j\,\dfrac{\Omega}{Q}}}$$

où $\Omega \equiv \dfrac{\omega}{\omega_0'}$ est la pulsation réduite, ω_0' et Q étant les constantes que l'on exprimera en fonction de α' et β', puis de a, k, M et m.

2.c) En déduire l'amplitude S des oscillations en fonction de Ω et Q. Que vaut-elle si $\Omega = 1$?

2.d) Montrer que S atteint un maximum S_m pour une pulsation réduite Ω_m que l'on déterminera en fonction de Q, et démontrer que $\boxed{\dfrac{S_m}{e_m} = \sqrt{\dfrac{1}{1 - \Omega_m^4}}}$.

2.e) Calculer Q, Ω_m et $\dfrac{S_m}{e_m}$.

2.f) Tracer avec soin le graphe (ou l'allure du graphe si la question précédente n'a pas été faite) donnant $\dfrac{S}{e_m}$ en fonction de Ω dans la plage $0 \leq \Omega \leq 10$.

2.g) Calculer la pulsation propre ω_0'. En déduire la distance λ_m entre les ondulations du sol provoquant la résonance des oscillations du châssis si le véhicule roule à une vitesse V de 90 $km.h^{-1}$. Comment réagit le châssis sur des déformations plus rapprochées passées à la même vitesse ?

Indications et réponses partielles : (résultats utilisables pour répondre aux questions suivantes)
1.a) $\lambda = \dfrac{2\pi}{\gamma}$; $\omega = \gamma V$ – **1.b)** $f(t) = \alpha'\,\dot{e}(t) + \beta'\,e(t)$

2.b) $\omega_0' = \sqrt{\beta'} = \sqrt{\dfrac{4k}{M + 4m}}$; $Q = \sqrt{\dfrac{M + 4m}{4M}}$

2.d) Poser $u \equiv \Omega^2$ et dériver $\left(\dfrac{S}{e_m}\right)^2$ par rapport à $u \ldots \rightarrow \Omega_m = Q\sqrt{\sqrt{1 + \dfrac{2}{Q^2}} - 1}$

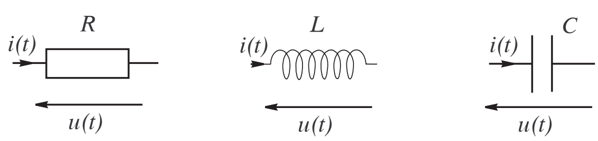
DL n°13 – Comportement Routier d'une Automobile

Concours EIA 1999 [ATS et TSI] (suite et fin, *)

Analogie électrique

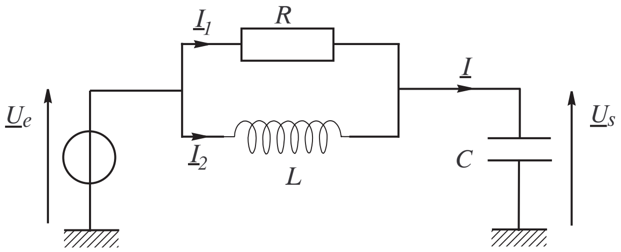
1) Le comportement du véhicule peut être simulé par un circuit électrique. On se propose, ici, d'étudier celui qui représente au mieux la réponse harmonique du véhicule sur route dégradée du **DL12**.

1.a) Rappeler les équations différentielles reliant le courant $u(t)$ et l'intensité $i(t)$ dans chacun des trois dipôles ci-dessous.



1.b) En déduire les relations entre leurs amplitudes complexes $\underline{U}$ et $\underline{I}$ en régime sinusoïdal de pulsation ω imposée.

2) Le circuit ci-contre est alimenté par un générateur de tension parfait délivrant une tension sinusoïdale $\underline{u}_e$ de pulsation ω.



2.a) Déterminer l'impédance équivalente $\underline{Z}$ de ce circuit.

2.b) Quelles grandeurs d'entrée $\underline{G}_e$ et de sortie $\underline{G}_s$ doivent être choisies pour obtenir une **fonction de transfert harmonique** équivalente à la question **DLn°12.2.b)**, c'est-à-dire telles que :

$$\frac{\underline{G}_s}{\underline{G}_e} = \frac{1 + j\,\dfrac{\Omega}{Q}}{1 - \Omega^2 + j\,\dfrac{\Omega}{Q}}$$

où $\Omega \equiv \dfrac{\omega}{\omega_0}$ est la pulsation réduite, ω_0 une pulsation propre et Q un rapport caractéristique dont on déterminera les expressions en fonction de R, L et C.

3) Pour préciser l'analogie électrique au modèle mécanique, il faut établir **l'équivalence des paramètres** mécanique $m + \dfrac{M}{4}$, k, a et électriques R, L, C.

3.a) Quelle est la **puissance moyenne** dissipée dans la résistance R en fonction de l'amplitude U_e, de R, L, C et ω ?

3.b) On note V_e l'amplitude de la vitesse $\dot{e}$ verticale de la roue dans **DLn°13.2)** due à la déformation sinusoïdale de la route, et V_s celle de la vitesse $\dot{s}$ du châssis. On donne également l'expression de la **puissance moyenne** dissipée par frottement dans l'amortisseur en fonction de a, k, M et m : $< \mathcal{P}_f > = \dfrac{1}{2}\, a V_e^2\, \dfrac{\omega^4}{(\beta' - \omega^2)^2 + \alpha'^2 \omega^2}$

En comparant les expressions des deux puissances moyennes, ainsi que celles des deux fonctions de transfert **DLn°12.2.b)** et **DLn°13.2.b)**, trouver les équivalents électriques de a, k, $m + \dfrac{M}{4}$ et V_s.

Indications et réponses partielles : (résultats utilisables pour répondre aux questions suivantes)

2.a) $\underline{Z} = \dfrac{R - RCL\omega^2 + jL\omega}{jC\omega\,(R + jL\omega)}$ – **2.b)** Diviseur de tension entre $\underline{U}_s$ et $\underline{U}_e$. → d'où le résultat, avec $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$; $Q = \dfrac{R}{L\omega_0}$.

3.a) $< \mathcal{P}_J > = \dfrac{1}{2} R I_1^2 = \dfrac{1}{2}\dfrac{U_R^2}{R} = ... = \dfrac{1}{2R}\,\dfrac{L^2C^2\omega^4}{(1 - LC\omega^2)^2 + \dfrac{L^2\omega^2}{R^2}}\,U_e^2.$

Solution DL n°12 :

Premièrement : ➜ Cf **DL7** ! ! . . . ensuite : remarquons que sur le schéma et dans l'énoncé, la côte z par rapport à l'horizontale est désormais notée s !

1) Comportement sur une route difficile du véhicule chargé.

1.a) • la période spatiale ('distance entre deux bosses') correspond à $\gamma\lambda = 2\pi$ → $\boxed{\lambda = \dfrac{2\pi}{\gamma}}$

• Le véhicule roule selon (Ox) à la vitesse $V = cte$, donc, (avec un choix judicieux de l'origine des temps), $x = Vt$ et $e(x)$ peut s'écrire explicitement en fonction du temps t :

$$e(t) = e_m \cos(\gamma x) = e_m \cos(\gamma V\, t) = e_m \cos(\omega t) \;\Rightarrow\; \boxed{\omega = \gamma V = 2\pi \frac{V}{\lambda}}$$

Ce qui se retrouve en écrivant que la durée de parcours entre deux bosses est $T = \dfrac{\lambda}{V} = \dfrac{2\pi}{\omega}$.

1.b) • La force de frottement exercée par l'amortisseur sur le châssis est proportionnelle à la différence de vitesse de ses extrémités : $\overrightarrow{F}_{\text{frot}} = -a\,(\dot{z}_C - \dot{z}_A)\,\overrightarrow{e_z} = -a\,(\dot{s} - \dot{e})\,\overrightarrow{e_z}$.
Donc, selon $\overrightarrow{e_z}$: $\boxed{F_{\text{frot}} = -a\,(\dot{s} - \dot{e})}$
• L'équation traduisant l'équilibre du véhicule en charge nominale est toujours :

$$0 = -k(L'_e - L_0) - \frac{(M+4m)\,g}{4} \quad (1'')$$

Tandis que l'équation du mouvement du châssis chargé selon $\overrightarrow{e_z}$ devient :

$$\frac{(M+4m)}{4}\,\ddot{s} = -k(L - L_0) - \frac{(M+4m)\,g}{4} - a\,(\dot{s} - \dot{e}) \quad (2'')$$

Soit, en faisant $(2'') - (1'')$, avec $L - L'_e = s - e - z'_0$:

$$\boxed{\ddot{s} + \alpha'\,\dot{s} + \beta'\,s = f + \delta' \quad (\star) \qquad \text{avec} \qquad \alpha' = \frac{4a}{M+4m} \qquad \beta' = \frac{4k}{M+4m} \qquad \delta' = \frac{4k}{M+4m}\,z'_0}$$

$$\text{et} \quad \boxed{f = \alpha'\,\dot{e} + \beta'\,e}$$

2) Régime forcé permanent.

2.a) Le régime forcé permanent est le régime des oscillations sinusoïdales de pulsation ω imposées au système une fois que le régime transitoire a disparu.
Il correspond à la solution particulière de l'équation différentielle. Il est de forme sinusoïdale et de pulsation ω.

2.b) • On cherche à résoudre, en notation complexes ($\underline{e} = e_m\,e^{j\omega t}$ et $\underline{s} = \underline{S}\,e^{j\omega t}$), l'équation :

$$\ddot{\underline{s}} + \alpha'\,\dot{\underline{s}} + \beta'\,\underline{s} = \underline{f}.$$

• On ne tient pas compte du terme δ' dans $(\star)$ parce que seules les oscillations du châssis nous intéresse ; or δ' n'intervient que par l'ajout d'une constante ($z'_0 = s_0$) dans la solution particulière. (Négliger δ' revient, finalement, à translater le repère à la position d'équilibre s_0.)
• En complexes, il vient : $\underline{S}\,(\beta' - \omega^2 + j\omega\alpha') = e_m\,(\beta' + j\omega\alpha')$, soit :

$$\boxed{\underline{S} = e_m\,\frac{\beta' + j\omega\alpha'}{\beta' - \omega^2 + j\omega\alpha'}} \quad \text{qui peut s'écrire :} \quad \boxed{\underline{S} = e_m\,\frac{1 + j\,\dfrac{\Omega}{Q}}{1 - \Omega^2 + j\,\dfrac{\Omega}{Q}}}$$

avec : $\boxed{\Omega = \dfrac{\omega}{\omega'_0}}$ $\boxed{\omega'_0 = \sqrt{\beta'} = \sqrt{\dfrac{4k}{M+4m}}}$ $\boxed{Q = \dfrac{\omega'_0}{\alpha'} = \sqrt{\dfrac{M+4m}{4M}}}$

2.c) Donc : $\boxed{S = |\underline{S}| = e_m \sqrt{\dfrac{1 + \dfrac{\Omega^2}{Q^2}}{(1-\Omega^2)^2 + \dfrac{\Omega^2}{Q^2}}}}$. Et lorsque $\Omega = 1$, $\boxed{S_{(\Omega=1)} = e_m\sqrt{1+Q^2}}$.

2.d) • On pose $u = \Omega^2$ et on dérive $g(u) = \left(\dfrac{S}{e_m}\right)^2 = \dfrac{1 + \dfrac{u}{Q^2}}{(1-u)^2 + \dfrac{u}{Q^2}}$ par rapport à u :

$\dfrac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}u} = \ldots \rightarrow$ cette dérivée s'annule pour : $\dfrac{1}{2Q^2}\,u^2 + u - 1 = 0$.
Or, ce polynôme n'a qu'une seule racine positive ($u > 0\,!$) qui est :

$$u_m = Q^2\left(\sqrt{1 + \frac{1}{2Q^2}} - 1\right) \implies \boxed{\Omega_m = Q\sqrt{\sqrt{1 + \frac{1}{2Q^2}} - 1}}$$

Ω_m est la pulsation réduite de résonance correspondant à une résonance des oscillations du châssis roulant sur la route ondulée.

• $\left(\dfrac{S_m}{e_m}\right)^2 = \dfrac{1+\dfrac{u_m}{Q^2}}{(1-u_m)^2+\dfrac{u_m}{Q^2}}$, avec, par définition de u_m : $\dfrac{1}{2Q^2}\,u_m^2 + u_m - 1 = 0$

Soit : $\dfrac{u_m}{Q^2} = \dfrac{2-2u_m}{u_m}$. Donc :

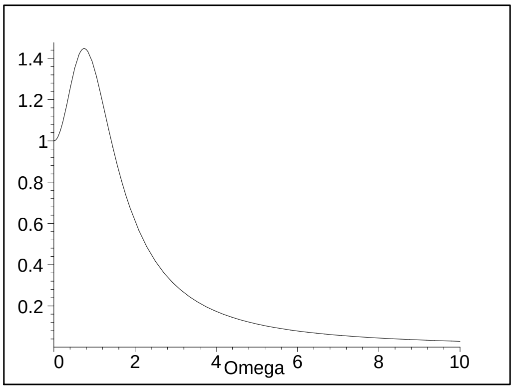
$$\left(\frac{S_m}{e_m}\right)^2 = \frac{\dfrac{2-u_m}{u_m}}{(1-u_m)^2+2\,\dfrac{1-u_m}{u_m}} = \frac{2-u_m}{u_m(1-u_m)^2+2\,(1-u_m)} = \frac{2-u_m}{(1-u_m)(u_m-u_m^2+2)}$$

Soit : $\left(\dfrac{S_m}{e_m}\right)^2 = \dfrac{2-u_m}{(1-u_m)(2-u_m)(1+u_m)} = \dfrac{1}{1-u_m^2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\dfrac{S_m}{e_m} = \sqrt{\dfrac{1}{1-\Omega_m^4}}}$

2.e) AN : $\boxed{Q = 0,59 \qquad \Omega_m = 0,75 \qquad \dfrac{S_m}{e_m} = 1,2}$.

Rq : Situation où le facteur de qualité est faible, pour avoir une faible acuité à la résonance $\dfrac{S_m}{e_m}$.

2.f) Cf. graphe ci-contre.



2.g) • Valeur de la pulsation propre du système :

$$\boxed{\omega_0' = \sqrt{\frac{4k}{M+4m}} = 2\sqrt{\frac{44\,100}{1\,400}} = 11,2\ rad.s^{-1}}$$

• Pour être à la résonance, il faut que

$$\omega = \omega_m = \Omega_m\,\omega_0' = 0,75\omega_0' = 8,4\ rad.s^{-1}$$

Or, $\lambda = VT = V\,\dfrac{2\pi}{\omega}$, donc, la distance λ_m entre les ondulations du sol qui commande la résonance des oscillations du châssis si le véhicule roule à vitesse V constante est :

$$\boxed{\lambda_m = V\,\frac{2\pi}{\omega_m} = V\,\frac{2\pi}{0,75\omega_0'} = 18,7\ m}$$

• Si les déformations sont plus rapprochées, $\lambda < \lambda_m$, soit $\omega > \omega_m$; on sort donc de la zone de résonance et les oscillations de la route sont alors mieux absorbées par le véhicule : $\dfrac{S}{e_m} < \dfrac{S_m}{e_m}$.

Solution DL n°13 :

1.a) En convention récepteur :

$$\boxed{u_R = R\,i_R \qquad u_L = L\,\frac{di_L}{dt} \qquad i_C = \frac{dq}{dt} = C\,\frac{du_C}{dt}}$$

1.b) Aux trois relations précédentes correspondent les relations entre amplitudes complexes (en posant $\underline{i} = \underline{I}\,e^{j\omega t}$ et $\underline{u} = \underline{U}\,e^{j\omega t}$) :

$$\underline{U}_R = R\,\underline{I}_R \qquad \underline{U}_L = jL\omega\,\underline{I}_L \qquad \underline{U}_C = \frac{1}{jC\omega}\,\underline{I}_C$$

2.a) L'impédance du circuit est : $\underline{Z} = \underline{Z}_R//\underline{Z}_L + \underline{Z}_C = \dfrac{jLR\omega}{R+jL\omega} + \dfrac{1}{jC\omega}$.

$$\boxed{\underline{Z} = \frac{R - RCL\omega^2 + jL\omega}{jC\omega\,(R+jL\omega)}}$$

2.b) Diviseur de tension entre $\underline{U}_s$ et $\underline{U}_e$:

$$\frac{\underline{U}_s}{\underline{U}_e} = \frac{\underline{Z}_C}{\underline{Z}} = \frac{R + jL\omega}{R - RCL\omega^2 + jL\omega} = \frac{1 + j\,\dfrac{L\omega}{R}}{1 - CL\omega^2 + j\,\dfrac{L\omega}{R}}$$

Soit : $\boxed{\dfrac{\underline{U}_s}{\underline{U}_e} = \dfrac{1 + j\,\dfrac{\Omega}{Q}}{1 - \Omega^2 + j\,\dfrac{\Omega}{Q}}}$ avec : $\boxed{\Omega = \dfrac{\omega}{\omega_0}}$ $\boxed{\omega_0 = \sqrt{\dfrac{1}{LC}}}$ $\boxed{Q = \dfrac{R}{L\omega_0} = R\sqrt{\dfrac{C}{L}}}$

3.a) La puissance dissipée par effet Joule est en moyenne :

$$< \mathcal{P}_J >= \frac{1}{T}\int_0^T Ri^2\,dt = \frac{1}{2}\,RI_1^2 = \frac{1}{2}\,\frac{U_R^2}{R} = \frac{1}{2R}\,\frac{L^2\omega^2}{1 + \dfrac{L^2\omega^2}{R^2}}\,I^2 = \frac{1}{2R}\,\frac{L^2\omega^2}{1 + \dfrac{L^2\omega^2}{R^2}}\,\frac{C^2\omega^2\left(1 + \dfrac{L^2\omega^2}{R^2}\right)}{(1 - LC\omega^2)^2 + \dfrac{L^2\omega^2}{R^2}}\,U_e^2$$

$$\boxed{< \mathcal{P}_J >= \frac{1}{2R}\,\frac{L^2C^2\omega^4}{(1 - LC\omega^2)^2 + \dfrac{L^2\omega^2}{R^2}}\,U_e^2}$$

3.b) La puissance dissipée par frottement visqueux dans l'amortisseur est en moyenne :

$$< \mathcal{P}_f >= \frac{1}{T}\int_0^T |\overrightarrow{F}_{\text{frot}}\cdot(\dot{s} - \dot{e})\,\overrightarrow{e_z}|dt = \frac{1}{T}\int_0^T a\,(\dot{s} - \dot{e})^2 dt = a < (\dot{s} - \dot{e})^2 >.$$

Pour calculer $(\dot{s} - \dot{e})$, il faut prendre la partie réelle de $(\dot{\underline{s}} - \dot{\underline{e}})$, avec, d'après **DL12.2.b)** :

$$\underline{s} = \underline{e}\,\frac{\beta' + j\omega\alpha'}{\beta' - \omega^2 + j\omega\alpha'} \qquad \text{et donc :} \qquad \dot{\underline{s}} = \dot{\underline{e}}\,\frac{\beta' + j\omega\alpha'}{\beta' - \omega^2 + j\omega\alpha'}$$

ce qui donne : $\dot{\underline{s}} - \dot{\underline{e}} = \dot{\underline{e}}\,\dfrac{\omega^2}{\beta' - \omega^2 + j\omega\alpha'} = \dot{\underline{e}}\,\dfrac{\omega^2(\beta' - \omega^2 - j\omega\alpha')}{(\beta' - \omega^2)^2 + \alpha'^2\omega^2}$.

Et donc : $\mathcal{R}e(\dot{\underline{s}} - \dot{\underline{e}}) = \dot{s} - \dot{e} = \dfrac{V_e\,\omega^2}{(\beta' - \omega^2)^2 + \alpha'^2\omega^2}\,((\beta' - \omega^2)\cos\omega t + \alpha'\omega\sin\omega t)$.

Alors : $< \mathcal{P}_f >= a < (\dot{s} - \dot{e})^2 >$, ce qui donne :

$$< \mathcal{P}_f >= \frac{V_e^2\,\omega^4}{((\beta' - \omega^2)^2 + \alpha'^2\omega^2)^2}\,\Big((\beta' - \omega^2)^2 \underbrace{< \cos^2\omega t >}_{\frac{1}{2}} + \alpha'^2\omega^2 \underbrace{< \sin^2\omega t >}_{\frac{1}{2}} + 2(\beta' - \omega^2)\alpha'\omega \underbrace{< \cos(\omega t)\sin(\omega t) >}_{0}\Big).$$

Finalement : $\boxed{< \mathcal{P}_f >= \dfrac{1}{2}\,aV_e^2\,\dfrac{\omega^4}{(\beta' - \omega^2)^2 + \alpha'^2\omega^2} = \dfrac{1}{2}\,aV_e^2\,\dfrac{\left(\dfrac{m + M/4}{k}\right)^2\omega^4}{\left(1 - \dfrac{m + M/4}{k}\,\omega^2\right)^2 + \dfrac{a^2}{k^2}\,\omega^2}}$

3.c) la comparaison des deux expressions des puissances moyennes dissipées par le système mécanique en suspension et le circuit électrique permet d'identifier les **équivalences électromécaniques** suivantes :

$$\boxed{a \longleftrightarrow \frac{1}{R} \qquad k \longleftrightarrow \frac{1}{L} \qquad m + \frac{M}{4} \longleftrightarrow C \qquad V_s \longleftrightarrow U_s}$$

Rq : Pour la dernière analogie, comparer $\dfrac{\underline{s}}{\underline{e}}$ avec $\dfrac{\underline{U}_s}{\underline{U}_e}$.