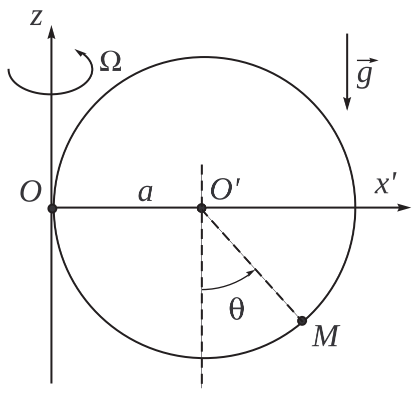
DL n°15

Mouvement d'un anneau sur un cerceau

d'après CCP TSI 2001 (*) [Ma03/02]

Un cerceau est assimilable à un cercle de centre O' et de rayon a. Situé dans un plan vertical $(x'Oz)$, il tourne autour d'une de ses tangentes verticales (Oz) à la vitesse angulaire Ω constante.
Un anneau assimilé à un point matériel M de masse m est mobile sans frottement sur ce cerceau.
On note θ l'angle que fait $O'M$ avec la verticale descendante passant par O' et compté positivement dans le sens trigonométrique.
On note $\mathcal{R}$ le référentiel galiléen $(Oxyz)$ et $\mathcal{R}'$ le référentiel $O'x'y'z$ lié au cerceau.



I - Utilisation du principe fondamental de la dynamique :

1) Écrire le principe fondamental de la dynamique dans $\mathcal{R}'$. On notera $\overrightarrow{F_{ie}}$, $\overrightarrow{F_C}$ et $\overrightarrow{R}$ respectivement les forces d'inertie d'entraînement, de Coriolis et la réaction du cerceau sur M.
2) Établir l'expression de $\overrightarrow{F_{ie}}$ et montrer que cette force est colinéaire à $\overrightarrow{e_{x'}}$.
3) Établir l'expression de $\overrightarrow{F_C}$ et montrer que cette force est colinéaire à $\overrightarrow{e_{y'}}$.
4) En déduire que l'équation dun mouvement peut s'écrire sous la forme : $a\,\ddot{\theta} = f(\theta)$.
5) Donner l'expression des composantes de la réaction du cerceau dans la base $(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_{y'}}, \overrightarrow{e_\theta})$.

II - Utilisation du théorème du moment cinétique :

1) Définir le moment cinétique du point M en O' dans le référentiel $\mathcal{R}'$ et donner son expression.
2) Exprimer le théorème du moment cinétique dans le référentiel $\mathcal{R}'$.
3) En déduire l'équation du mouvement.
4) Peut-on obtenir par ce théorème les expressions des composantes de la réaction du cerceau ? Si oui, donner les expressions correspondantes.

III - Utilisation de l'énergie mécanique

1) Montrer que la force d'inertie d'entraînement dérive d'une énergie potentielle $\mathcal{E}_{p_{ie}}$ dont on donnera l'expression.
2) Exprimer l'énergie potentielle $\mathcal{E}_{p_g}$ dont dérive le poids.
3) Les autres forces dérivent-elles d'une énergie potentielle ? Justifier la réponse. En déduire l'expression de l'énergie potentielle $\mathcal{E}_p(\theta)$ du point M en prenant $\mathcal{E}_p(\theta = 0) \equiv 0$.
4) Justifier le fait qu'on puisse appliqer la conservation de l'énergie mécanique.
5) Retrouver l'équation du mouvement par la conservation de l'énergie mécanique.

IV - Étude de l'équilibre relatif

1) Établir que l'équation donnant les positions d'équilibre est : $a\Omega^2(1+\sin\theta) = g\tan\theta$
2) Montrer par un raisonnement graphique que cette équation admet deux solutions. On précisera l'intervalle auquel elles appartiennent.
3) On désire qu'une position d'équlibre existe pour $\theta = \dfrac{\pi}{6}$. Calculer la valeur de la vitesse angulaire de rotation correspondante.
4) Cette position d'équilibre est-elle stable ?