DL n^{o}17

Système à deux corps : Étoile double spectroscopique

Concours ESTP-ENSAM 1998 [PC] (*)

Soit une étoile double quelque part dans la galaxie constituée de deux éléments de masses m_1 et m_2 que l'on suppose concentrées en deux points M_1 et M_2. Chacun des deux éléments n'est soumis qu'à la force de gravitation exercée par l'autre (le champ de gravitation du reste la galaxie est négligeable).

Données numériques :

• Constantes universelles : $\mathcal{G} = 6,67.10^{-11}\ m^3.kg^{-1}.s^{-2}$; $c = 3.10^8\ m.s^{-1}$ et $1u.a. = 1,5.10^{11}m$.

• Données observationnelles : $\epsilon = 7.10^{-5}$; $T = 165\ jours$; $\phi = 0$.

1) Rappeler les propriétés des référentiels galiléens et du principe d'inertie.

2) Montrer que l'on peut attacher au centre de masse G de l'étoile double un repère barycentrique galiléen $\mathcal{R}_b$ $(Gxyz)$ de vecteurs unitaires $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{k}$.

A. Étude des mouvements de M_1 et M_2 dans $\mathcal{R}_b$

3) Écrire les quantités de mouvement $\overrightarrow{p_1} = m_1\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{p_2} = m_2\overrightarrow{v_2}$ des deux éléments en fonction de la vitesse relative $\overrightarrow{v} \equiv \overrightarrow{v_2} - \overrightarrow{v_1}$ de M_2 par rapport à M_1 et de la masse réduite μ de l'étoile double définie par $\dfrac{1}{\mu} = \dfrac{1}{m_1} + \dfrac{1}{m_2}$.

4) Écrire le moment cinétique $\overrightarrow{L_{G/\mathcal{R}_b}}$ au point G du système.

Constater son équivalence avec celui d'un objet de masse μ, de vitesse $\overrightarrow{v}$ et situé en un point M tel que $\overrightarrow{GM} = \overrightarrow{M_1M_2}$.

5) Écrire l'énergie cinétique $\mathcal{E}_k$ du système. Faire un commentaire à la lumière du constat de la question précédente.

Montrer que l'énergie mécanique $\mathcal{E}_m$ de l'étoile double s'interprète comme l'énergie mécanique de cette particule fictive.

Que peut-on dire de $\mathcal{E}_m$?

6) Montrer alors que mouvement du point M est celui d'une masse ponctuelle μ soumise à une force égale à celle qu'exerce m_1 sur m_2.

7) Indiquer comment on déduit les trajectoires de M_1 et de M_2 de celle de M.

B. Étude du mouvement de M

8) Rappeler succinctement pourquoi la trajectoire de M est plane et décrite selon la loi des aires.

Exprimer C, constante des aires, en fonction de $L_{G/\mathcal{R}_b}$ et μ.

On peut alors choisir le repère cartésien $(Gxyz)$ de $\mathcal{R}_b$ de sorte que la trajectoire de M soit située dans le plan $y = 0$. On repère enfin le point M par ses coordonnées r, θ dans la base orthonormée $(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta})$ avec $\theta = (\overrightarrow{k}, \overrightarrow{e_r})$ et $\overrightarrow{GM} = r\overrightarrow{e_r}$.

9) Montrer que le principe fondamental de la dynamique peut se mettre sous la forme :

$$\mu\,\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathcal{G}m_1m_2}{\mu C}\,\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{e_\theta}}{\mathrm{d}t} \qquad \text{où } C \text{ désigne la constante des aires.}$$

L'intégrale de cette relation ci-dessus s'écrit : $\overrightarrow{v} = \dfrac{\mathcal{G}m_1m_2}{C}\left(\overrightarrow{e_\theta} + \overrightarrow{e}\right)$ où $\overrightarrow{e}$ est une constante d'intégration.

10) Montrer que, moyennant un choix ad-hoc des axes (Gx) et (Gz), la trajectoire de M est une conique de foyer G d'équation : $\boxed{r = \dfrac{p}{1 + e\cos\theta}}$

11) Exprimer p en fonction de la constante d'attraction universelle $\mathcal{G}$, de la constante des aires C et de la masse $m = m_1 + m_2$ du système.

12) Donner, dans les axes choisis à la question **10**, les équations des trajectoires des points M_1 et M_2 ainsi que les expressions de leurs vitesses $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$ dans le repère $(G, \overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta})$.

C. Observation du phénomène

Un observateur terrestre, lié à $\mathcal{R}_b$ et très éloigné de G, reçoit le rayonnement (photons) émis par chacun des deux éléments de l'étoile double. Le sens et la direction de propagation sont définis dans $\mathcal{R}_b$ par le vecteur unitaire $\overrightarrow{u}$, parallèle au plan $z = 0$ et faisant avec l'axe (Gx) l'angle $\phi = (\overrightarrow{i}, \overrightarrow{u})$.
On cherche à observer l'émission de la raie H_α de l'hydrogène, de longueur d'onde propre $\lambda_0 = 656,3\ nm$.
Les mouvements des sources décalent cette longueur d'onde qui est alors perçue (effet Doppler) selon les relations

$$\boxed{\lambda_1 = \lambda_0 \left(1 - \frac{\overrightarrow{v_1}.\overrightarrow{u}}{c}\right)} \quad \text{et} \quad \boxed{\lambda_2 = \lambda_0 \left(1 - \frac{\overrightarrow{v_2}.\overrightarrow{u}}{c}\right)} \quad \text{où } c \text{ désigne la vitesse de la lumière}$$

13) Écrire, en fonction de λ_0, $\mathcal{G}$, m_1, m_2, ϕ, c, C, e et θ les expressions des longueurs d'onde λ_1 et λ_2 observées.

14) Des mesures effectuées sur une étoile double indiquent des variations de λ_1 et λ_2 sinusoïdales avec le temps :

$$\lambda_1 - \lambda_0 = A_1 \cos\omega t \qquad \text{et} \qquad \lambda_2 - \lambda_0 = A_2 \cos\omega t \quad \text{où } \omega \text{ note une pulsation constante.}$$

→ En déduire que les trajectoires de M_1 et M_2 sont circulaires et décrites à vitesse angulaire $\dot{\theta}$ constante.

15 L'amplitude relative des variations de la longueur d'onde observée se définit par :

$$\epsilon \equiv \frac{1}{2}\frac{\lambda_{max} - \lambda_{min}}{\lambda_0}$$

où λ_{max} et λ_{min} sont respectivement les valeurs maximale et minimale de la longueur d'onde mesurée.
Des mesures donnent des variations relatives ϵ_1 et ϵ_2 identiques pour et λ_1 et λ_2 : que peut-on en déduire sur les valeurs relatives de m_1 et m_2 ?

16) Exprimer, dans l'hypothèse ci-dessus, les vitesses $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$ de M_1 et M_2 en fonction de la constante de gravitation $\mathcal{G}$, de la masse $m = m_1 + m_2$, de la période de révolution T du système, et de $\overrightarrow{e_\theta}$.

17) Exprimer la masse m de l'étoile double en fonction des paramètres $\mathcal{G}$, c, T, ϵ et ϕ.

18) Application numérique : Calculer les valeurs de la masse m et des vitesses v_1 et v_2. Commenter ces valeurs.

19) Exprimer la taille caractéristique $r = M_1M_2$ du système en fonction de m, $\mathcal{G}$ et T.

20) Application numérique : Calculer r.
Commenter ce résultat à la lumière de données stellaires éventuellement connues.