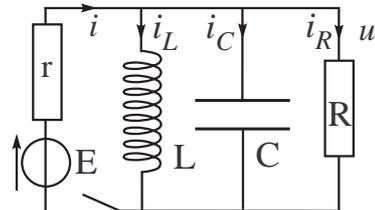


DM n°3 : Circuit RLC parallèle

Réponse à un échelon de tension

Sur le schéma du montage ci-contre, le générateur de tension est idéal, de *f.é.m.* E constante. Les résistors sont linéaires, de résistances R et r constantes.

Tant que l'interrupteur est ouvert, le condensateur, de capacité C , est déchargé et la bobine idéale, d'inductance L , n'est parcourue par aucun courant. À $t = 0$, l'interrupteur est fermé instantanément et on cherche à déterminer l'évolution ultérieure du réseau électrique.



1) Déterminer, par un raisonnement physique simple (pratiquement sans calcul), la tension u et les intensités i , i_L , i_C et i_R dans les quatre branches :

- a) juste après la fermeture de l'interrupteur (instant $t = 0^+$),
- b) au bout d'une durée très grande ($t \rightarrow \infty$).

2) Établir l'équation différentielle liant i_R à ses dérivées par rapport au temps t .

Solution DM n°3

Avant de se lancer dans la résolution, posons la loi des nœuds et les relations qui existent entre les grandeurs électriques dans chaque branche (relations valables à chaque instant, $t \leq 0$ ou $t \geq 0$) :

$$i = i_L + i_C + i_R \quad \textcircled{1}$$

$$u = u_R = Ri_R \quad \textcircled{2}$$

$$u = u_C = \frac{q}{C} \quad \text{avec :} \quad i_C = \frac{dq}{dt} = C \frac{du}{dt} \quad \textcircled{3}$$

$$u = u_L = L \frac{di_L}{dt} \quad \textcircled{4}$$

$$u = E - ri \quad \textcircled{5}$$

1.a) • Comme l'intensité traversant une bobine est une fonction continue du temps et que la bobine n'est parcourue par aucun courant pour $t < 0$: $i_L(0^+) = i_L(0^-) = 0$.

• Comme la charge aux bornes d'un condensateur est une fonction continue du temps et que le condensateur est déchargé pour $t < 0$: $u(0^+) = \frac{q(0^+)}{C} = \frac{q(0^-)}{C} = 0$.

• Par ailleurs $i_R(0^+) = \frac{u(0^+)}{R} = 0$.

• Enfin $\textcircled{1} \xrightarrow[\text{comme } u(0^+)=0]{\textcircled{5}}$ $i_L(0^+) = i(0^+) = \frac{E}{r}$

1.b) Lorsque le régime permanent continu est établi, le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert et la bobine se comporte comme un simple fil.

D'où $i_C(\infty) = 0$ et $u(\infty) = 0$.

Ce qui entraîne $i_R(\infty) = 0$ et $i(\infty) = \frac{E}{r}$.

La loi des nœuds donne enfin $i_L(\infty) = i(\infty) = 0$

2) **Méthodologie** : On cherche l'équation différentielle vérifiée par i_R .

Il faut donc exprimer tous les autres courants dans la loi des nœuds en fonction de i_R seulement.

Or, les relations ③, ④ et ⑤ montre qu'on peut facilement exprimer ces intensités en fonction de u , laquelle s'exprime à son tour facilement en fonction de i_R .

Puisque ④ met en jeu la dérivée de i_L par rapport au temps, on dérive ① par rapport au temps :

$$\rightarrow \frac{di}{dt} = \frac{di_L}{dt} + \frac{di_C}{dt} + \frac{di_R}{dt}$$

qui devient, grâce à ③, ④ et ⑤ :

$$\frac{1}{r} \frac{d(E - u)}{dt} = \frac{u}{L} + C \frac{d^2 u}{dt^2} + \frac{di_R}{dt}$$

Enfin, puisque $u = Ri_R$, on obtient

$$\boxed{\frac{d^2 i_R}{dt^2} + \frac{1}{C} \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{r} \right) \frac{di_R}{dt} + \frac{1}{LC} i_R = 0} \quad (*)$$

3) L'équation différentielle d'ordre 2 qui s'écrit **sous sa forme canonique** :

$$\boxed{\frac{d^2 i_R}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{di_R}{dt} + \omega_0^2 i_R = 0} \quad (*)$$

avec, par identification :

- $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ **la pulsation propre** du circuit

- et $Q = R_0 C \omega_0$ son **facteur de qualité** ; en posant $R_0 = r // R = \frac{rR}{r+R}$