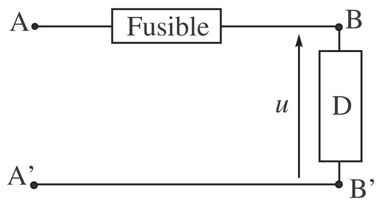
DM n°4
Puissance en régime sinusoïdal forcé

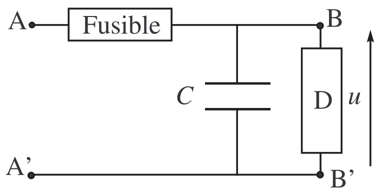
1) Un dipôle est alimenté en régime sinusoïdal forcé par une tension $u(t) = U\sqrt{2}\cos(2\pi f t)$ avec $U = 220\ V$ et $f = 50\ Hz$.
L'intensité du courant qui le parcourt est alors $i(t) = I\sqrt{2}\cos(2\pi f t + \varphi)$.
1.a) En fonction de U, I et φ, donner les expressions de :
α) l'impédance complexe $\underline{Z}$ et de son module Z (on notera j le nombre imaginaire pur tel que $j^2 = -1$) ;
β) la puissance électrique *moyenne* $\mathcal{P}_e$ absorbée par le dipôle.
1.b) En déduire l'expression $\mathcal{P}_e = \dfrac{U^2}{Z^2}R$, R étant la résistance électrique du dipôle.

2) Un fusible de 16 A protège une ligne électrique $\{(A,B)/(A',B')\}$ alimentant en régime sinusoïdal forcé, sous une tension efficace $U = 220\ V$ et une fréquence $f = 50\ Hz$, un dipôle D assimilable à une bobine d'inductance $L = 30.10^{-3}\ H$ en série avec un dipôle ohmique de résistance R (fig. ci-contre).



L'intensité efficace maximale admissible dans la ligne est $I_{max} = 16\ A$.
Ce dipôle absorbe une puissance électrique moyenne $\mathcal{P}_e = 2\,500\ W$.
La ligne $\{(A,B)/(A',B')\}$ se comporte comme un dipôle purement ohmique de résistance électrique totale $R_0 = 1,2\ \Omega$, fusible compris.
2.a) Calculer les deux valeurs possible R_1 et R_2 de la résistance R du dipôle D.
2.b) Pour chaque valeur R_1 et R_2, calculer l'intensité efficace I_1 et I_2 dans le dipôle D.
2.c) Déterminer la seule valeur de R possible compte tenu de la présence du fusible.
2.d) En déduire l'intensité efficace I_0 du courant électrique circulant dans la ligne $\{(A,B)/(A',B')\}$ et la puissance moyenne $\mathcal{P}_0$ dissipée par effet Joule dans cette ligne.

3) On ajoute, en parallèle sur le dipôle D, un condensateur de capacité $C = 130,4.10^{-6}\ F$.



3.a) calculer les intensités efficaces :
α) I_D dans le dipôle D ;
β) I_C dans le condensateur ;
γ) I'_0 dans la ligne.
3.b) Déterminer la puissance $\mathcal{P}'_0$ dissipée par effet Joule dans la ligne.
3.c) Comparer $\mathcal{P}'_0$ et $\mathcal{P}_0$. Conclure sur l'intérêt de ce condensateur.

Rép : 2.a) $R_1 = 7,5\ \Omega$ et $R_2 = 11,9\ \Omega$; **2.b)** $I_1 = 18,5\ A$ et $I_2 = 14,5\ A$; **2.d)** $\mathcal{P}_0 =< \mathcal{P}_J >= 2\,750\ \Omega$; **3.a)** $I_D = 14,5\ A$; $I_C = 9,0\ A$; $I'_0 = 11,4\ A$; **3.b)** $\mathcal{P}'_0 = 2\,654\ W$.

Solution DM n°4

1) $u(t) = U\sqrt{2}\cos(2\pi f t)$, $U = 220\ V$ et $f = 5\ Hz$; $i(t) = I_0\sqrt{2}\cos(2\pi f t + \varphi)$.

1.a.α) $\underline{U} = \underline{Z}\,\underline{I} \rightarrow \underline{Z} = \dfrac{\underline{U}}{\underline{I}} = \dfrac{U\sqrt{2}}{I_0\sqrt{2}e^{j\varphi}} \rightarrow \boxed{\underline{Z} = \dfrac{U}{I_0}e^{-j\varphi}}$

1.a.β)

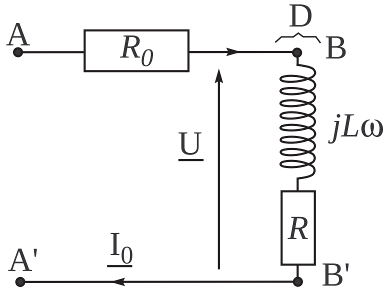
$$\begin{aligned}
< \mathcal{P} >=< u(t)i(t) > &= < U\sqrt{2}\cos(2\pi f t) I\sqrt{2}\cos(2\pi f t + \varphi) > \\
&= 2UI_0 < \frac{1}{2}(\cos(4\pi f t + \varphi) + \cos\varphi) > \\
&\rightarrow \boxed{\mathcal{P}_e =< \mathcal{P} >= UI_0\cos\varphi}
\end{aligned}$$

1.b) $\mathcal{P}_e = UI_0\cos\varphi$ et $I = \dfrac{U}{Z}$. Par ailleurs : $\cos\varphi = \cos(\text{arg}\,(\underline{Z})) = \dfrac{\mathcal{R}_e(\underline{Z})}{Z} \equiv \dfrac{R}{Z}$.

D'où : $\boxed{\mathcal{P}_e = \dfrac{U^2}{Z^2}R}$.

2) $\mathcal{P}_e = 2\,500\ W$ et $L = 30\ mH$.

De plus : $\mathcal{P}_e = \dfrac{U^2}{Z^2}R = \dfrac{U^2R}{R^2+L^2\omega^2}$.



2.a) D'où : $\boxed{\mathcal{P}_eR^2 - U^2R + L^2\omega^2\mathcal{P}_e = 0}$

Polynôme de degré 2 de discriminant :
$\Delta =$ « $b^2 - 4ac$ » $= U^4 - 4L^2\omega^2\mathcal{P}_e^2$

On vérifie que $\Delta \simeq 121,9.10^6\ V^4 > 0$

Ce qui signifie que le polynôme admet deux solutions réelles :

$$\begin{cases} R_1 = \text{«}\ \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\ \text{»} = \dfrac{U^2-\sqrt{\Delta}}{2\mathcal{P}_e} & \rightarrow \quad \boxed{R_1 \simeq 7,5\ \Omega} \\ R_2 = \text{«}\ \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\ \text{»} = \dfrac{U^2+\sqrt{\Delta}}{2\mathcal{P}_e} & \rightarrow \quad \boxed{R_2 \simeq 11,9\ \Omega} \end{cases}$$

2.b) $I_0 = \dfrac{U}{Z} = \dfrac{U}{\sqrt{R^2+L^2\omega^2}} \rightarrow$ deux intensités possibles :

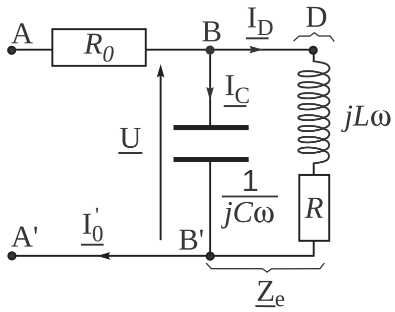
Si $R = R_1$, $\boxed{I_0 = I_1 \simeq 18,3\ A}$ et si $R = R_2$, $\boxed{I_0 = I_2 \simeq 14,5\ A}$.

2.c/d) Puisque le fusible impose $I_0 < 16\ A$,
on en déduit que $\boxed{R = R_2 \simeq 11,9\ \Omega}$ et $\boxed{I_0 = I_2 \simeq 14,5\ A}$.

D'où : $\boxed{\mathcal{P}_0 =< \mathcal{P}_J >= \dfrac{1}{2}R_{tot}I_m^2 = (R_0+R)I_0^2 = 2\,750\ W}$.

3) $\underline{Z}_e = \dfrac{\dfrac{1}{jC\omega}(R+jL\omega)}{\dfrac{1}{jC\omega}+R+jL\omega} = \dfrac{R+jL\omega}{1-LC\omega^2+jRC\omega}$

$$\underline{U} = \begin{cases} \dfrac{1}{jC\omega}\underline{I}_C \\ (R+jL\omega)\underline{I}_D \\ \underline{Z}_e\underline{I}'_0 \end{cases}$$



De plus : $C = 130,4\ \mu F$ et $R = R_2 \simeq 11,9\ \Omega$.

3.a.α) $\rightarrow$ $\boxed{I_D = \mid \underline{I}_D \mid = \dfrac{U}{\sqrt{R^2+L^2\omega^2}} \simeq 14,5\ A}$.

3.a.β) $\rightarrow$ $\boxed{I_C = \mid \underline{I}_C \mid = C\omega U \simeq 9,0\ A}$.

3.a.γ) $\rightarrow$ $\boxed{I'_0 = \mid \underline{I}'_0 \mid = \dfrac{U}{Z_e} = \dfrac{\sqrt{(1-LC\omega^2)^2+(RC\omega)^2}}{R^2+L^2\omega^2} \simeq 11,4\ A}$

3.b) $\mathcal{P}'_0 =< \mathcal{P}'_J >$ est la puissance dissipée par effet JOULE dans la ligne au niveau de la résistance R_0 parcourue par l'intensité efficace I'_0 et de la résistance $R = R_2$ parcourue par l'intensité efficace I_D. D'où :

$\boxed{\mathcal{P}'_0 = R_0I'^2_0 + R_2I_D^2 \simeq 2\,654\ W}$

3.c) $\boxed{\mathcal{P}'_0 < \mathcal{P}_0}$: l'ajout du condensateur permet de faire baisser les pertes par effets JOULE en faisant diminuer l'intensité efficace dans la ligne($I'_0 < I_0$).