

DM n°6 [pour le Ma03/03]

Mouvement d'une planète autour du Soleil

→ Cf Cours M10

Une Planète, de masse m , gravite autour du Soleil de masse $M \gg m$. On travaille dans le référentiel barycentrique \mathcal{R}^* , supposé galiléen, centré sur le centre d'inertie G du système $\mathcal{S} = \{S, P\}$. Dans ce référentiel, la réduction canonique permet l'étude du mouvement d'un point fictif, de masse μ , repéré par $\vec{r} = \overrightarrow{GK}$, de vitesse $\vec{v} = \vec{v}_{K/\mathcal{R}^*}$ et soumis à la force \vec{f} .

1) Expliciter μ , $\vec{r} = \overrightarrow{GK}$ et \vec{f} en fonction des données de l'énoncé.

2) Dans \mathcal{R}^* , le moment cinétique du système en G vaut : $\vec{L}^* = \vec{L}_{G/\mathcal{R}^*}(\mathcal{S}) = \vec{L}_{G/\mathcal{R}^*}(K) = \vec{r} \times \mu \vec{v}$. Démontrer que \vec{L}^* est constant et en déduire que le mouvement de K dans \mathcal{R}^* est plan. On notera \vec{e}_z le vecteur unitaire perpendiculaire à ce plan.

On définit le vecteur $\vec{C} = \frac{\vec{L}^*}{\mu}$ de norme C . Exprimer $\omega = \frac{d\theta}{dt}$, la vitesse angulaire de rotation de K , en fonction de C et de r .

3) Démontrer qu'en coordonnées polaires, $\vec{a} = \vec{a}_{K/\mathcal{R}^*}$, l'accélération de K dans \mathcal{R}^* peut s'écrire sous la forme :

$$\vec{a} = -C^2 u^2 \left(\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u \right) \vec{e}_r \quad \text{avec } u = \frac{1}{r}$$

En déduire une équation différentielle d'ordre 2 vérifiée par u .

4) À l'aide de la question précédente, montrer que r peut s'écrire : $r = \frac{p}{1 + e \cos \theta}$, où e est l'excentricité du mouvement de K , et p un paramètre, dont on donnera l'expression en fonction de μ , C , G , M , et m .

5) Pour quelles valeurs de e la trajectoire est-elle elliptique? Montrer qu'alors le demi-grand axe a de l'ellipse vaut $a = \frac{p}{1 - e^2}$.

6) On rappelle que si K décrit une ellipse, la surface S de celle-ci vaut $S = \pi \cdot a \cdot b$ avec b le demi-petit axe de l'ellipse. On appelle T la période de rotation du système autour de G et on rappelle que $p = \frac{b^2}{a}$.

En déduire la troisième loi de KÉPLER. Commenter ce résultat.