# DM n$^{o}$6 [pour le Ma03/03]

## Mouvement d'une planète autour du Soleil

➜ Cf Cours **M10**

Une Planète, de masse $m$, gravite autour du Soleil de masse $M \gg m$. On travaille dans le référentiel barycentrique $\mathcal{R}^*$, supposé galiléen, centré sur le centre d'inertie $G$ du système $\mathcal{S} = \{S, P\}$. Dans ce référentiel, la réduction canonique permet l'étude du mouvement d'un point fictif, de masse $\mu$, repéré par $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{GK}$, de vitesse $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}_{K/\mathcal{R}^*}$ et soumis à la force $\overrightarrow{f}$.

**1)** Expliciter $\mu$, $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{GK}$ et $\overrightarrow{f}$ en fonction des données de l'énoncé.

**2)** Dans $\mathcal{R}^*$, le moment cinétique du système en $G$ vaut : $\overrightarrow{L^*} = \overrightarrow{L}_{G/\mathcal{R}^*}(\mathcal{S}) = \overrightarrow{L}_{G/\mathcal{R}^*}(K) = \overrightarrow{r} \times \mu \overrightarrow{v}$. Démontrer que $\overrightarrow{L^*}$ est constant et en déduire que le mouvement de $K$ dans $\mathcal{R}^*$ est plan. On notera $\overrightarrow{e_z}$ le vecteur unitaire perpendiculaire à ce plan.

On définit le vecteur $\overrightarrow{C} = \dfrac{\overrightarrow{L^*}}{\mu}$ de norme $C$. Exprimer $\omega = \dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$, la vitesse angulaire de rotation de $K$, en fonction de $C$ et de $r$.

**3)** Démontrer qu'en coordonnées polaires, $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{a}_{K/\mathcal{R}^*}$, l'accélération de $K$ dans $\mathcal{R}^*$ peut s'écrire sous la forme :

$$\overrightarrow{a} = -C^2 u^2 \left( \frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}\theta^2} + u \right) \overrightarrow{e_r} \quad \text{avec } u = \frac{1}{r}$$

En déduire un équation différentielle d'ordre 2 vérifiée par $u$.

**4)** À l'aide de la question précédente, montrer que $r$ peut s'écrire : $r = \dfrac{p}{1 + e\cos\theta}$, où $e$ est l'excentricité du mouvement de $K$, et $p$ un paramètre, dont on donnera l'expression en fonction de $\mu$, $C$, $\mathcal{G}$, $M$, et $m$.

**5)** Pour quelles valeurs de $e$ la trajectoire est-elle elliptique ? Montrer qu'alors le demi-grand axe $a$ de l'ellipse vaut $a = \dfrac{p}{1 - e^2}$.

**6)** On rappelle que si $K$ décrit une ellipse, la surface $S$ de celle-ci vaut $S = \pi.a.b$ avec $b$ le demi-petit axe de l'ellipse. On appelle $T$ la période de rotation du système autour de $G$ et on rappelle que $p = \dfrac{b^2}{a}$.

En déduire la troisième loi de Képler. Commenter ce résultat.

## Solution DM n°6

**1)** $\boxed{\mu = \dfrac{Mm}{M+m}}$ $\boxed{\overrightarrow{r} = \overrightarrow{GK} = \overrightarrow{SP} = r\overrightarrow{e_r}}$ $\boxed{\overrightarrow{f} = \overrightarrow{f}_{S\to P} = -\mathcal{G}\dfrac{Mm}{r^2}\overrightarrow{e_r}}$.

**2)** Le théorème du moment cinétique dans le référentiel barycentrique pour la particule fictive donne, comme $\overrightarrow{r}$ et $\overrightarrow{f}$ sont parallèles :

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{L^*}}{\mathrm{d}t} = \overrightarrow{r} \times \overrightarrow{f} = \overrightarrow{0} \Rightarrow \boxed{\overrightarrow{L^*} = \overrightarrow{\mathrm{Cte}} = \overrightarrow{r} \times \mu\overrightarrow{v}}$$

Cette égalité montre que $\overrightarrow{r} \perp \overrightarrow{L^*}$, c'est-à-dire que tous les vecteurs $\overrightarrow{GK}(t) = \overrightarrow{SP}(t)$ sont perpendiculaires à un même vecteur $\overrightarrow{L^*}$ constant, donc à une direction constante de l'espace, qu'on peut appeler $\overrightarrow{e_z}$.
On en déduit que les mouvements de la particule fictive, du Soleil et de la planète ont lieu dans le plan $Gxy$ perpendiculaire à la direction $(G, \overrightarrow{e_z}) = (Gz)$.
On peut donc décrire le mouvement plan de $K$ dans la base polaire $(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta})$. Le vecteur position s'écrit $\overrightarrow{r} = r\overrightarrow{e_r}$ et le vecteur vitesse $\overrightarrow{v} = \dot{r}\overrightarrow{e_r} + r\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta}$. Alors :

$$\overrightarrow{L^*} = \overrightarrow{r}\times\mu\overrightarrow{v} = r\overrightarrow{e_r}\times(\dot{r}\overrightarrow{e_r}+r\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta}) = \mu r^2\omega\,\overrightarrow{e_z} \Rightarrow \boxed{\overrightarrow{C} = r^2\omega\,\overrightarrow{e_z}} \Rightarrow \boxed{C = r^2\omega} \Leftrightarrow \boxed{\omega = \dot{\theta} = \frac{C}{r^2}}$$

**3)** Le **P**rincipe **F**ondamental de la **D**ynamique donne, pour la particule fictive étudiée dan sle référentiel galiléen $\mathcal{R}^*$ : $\mu\overrightarrow{a} = \overrightarrow{f}$. Comme $\overrightarrow{f}$ est colinéaire à $\overrightarrow{e_r}$, on en déduit que l'accélération est purement radiale, ce qui s'exprime, en coordonnées polaires, de la manière suivante : $\overrightarrow{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\,\overrightarrow{e_r} = (\ddot{r} - r\omega^2)\,\overrightarrow{e_r}$.
En posant $u \equiv \dfrac{1}{r}$, on obtient :

$$\begin{cases} \dot{r} = \dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \dfrac{C}{r^2}\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} = -C\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\dfrac{1}{r}\right) = -C\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta} = -C\,u'_\theta \\ \ddot{r} = \dfrac{\mathrm{d}\dot{r}}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}\dot{r}}{\mathrm{d}\theta}\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \dfrac{C}{r^2}\dfrac{\mathrm{d}}{\theta}\left(-C\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta}\right) = -\dfrac{C^2}{r^2}.\dfrac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\theta^2} = -C^2\,u^2.u''_\theta \end{cases} \quad \text{Soit :} \quad \begin{cases} \dot{r} = -C\,u'_\theta \\ \boxed{\ddot{r} = -C^2\,u^2.u''_\theta} \end{cases}$$

Par ailleurs, comme $\omega = \dot{\theta} = \dfrac{C}{r^2}$, on en déduit $\boxed{r\omega^2 = C^2\,u^3}$. ce qui permet d'exprimer $\overrightarrow{a}$ en fonction de la seule variable $\dfrac{1}{r} = u = u(\theta)$ :

$$\boxed{\overrightarrow{a} = -C^2\,u^2\left(\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\theta^2} + u\right)\,\overrightarrow{e_r}}$$

Alors, le **P.F.D.** s'écrit :

$$\mu\overrightarrow{a} = \overrightarrow{f} \quad\Leftrightarrow\quad -\mu C^2\,u^2\left(\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\theta^2} + u\right)\,\overrightarrow{e_r} = -\mathcal{G}\frac{Mm}{r^2}\overrightarrow{e_r} \quad\Rightarrow\quad \boxed{\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\theta^2} + u = \frac{\mathcal{G}Mm}{\mu C^2}}$$

**4)** Cette équation différentielle admet :
• une solution générale $u_G$ de l'équation sans second membre :

$$\frac{\mathrm{d}^2u_G}{\mathrm{d}\theta^2} + u_G = 0 \quad\Leftrightarrow\quad u_G = A\cos(\theta - \varphi) \quad \text{avec } A \in \mathbb{R}^+ \text{ et } \varphi \in [0, 2\pi[$$

• une solution particulière $u_P$ de l'équation avec second membre (celui-ci étant constant, on cherche $u_P$ constante) :

$$\cancel{\frac{\mathrm{d}^2u_P}{\mathrm{d}\theta^2}} + u_P = \frac{\mathcal{G}Mm}{\mu C^2} \quad\Leftrightarrow\quad u_P = \frac{\mathcal{G}Mm}{\mu C^2}$$

On en déduit la solution de l'équation différentielle : $u = u_G + u_P = A\cos(\theta - \varphi) + \dfrac{\mathcal{G}Mm}{\mu C^2}$
Choisir $r = r_{\mathsf{min}}$ pour $\theta = 0$ (soit $u = u_{\mathsf{max}}$) revient à prendre $\varphi = 0$. Ce que nous faisons, puisque l'énoncé ne s'y oppose pas.

$$u = A\cos\theta + \frac{\mathcal{G}Mm}{\mu C^2} = \frac{1}{r} \quad \Leftrightarrow \quad r = \frac{1}{A\cos\theta + \dfrac{\mathcal{G}Mm}{\mu C^2}} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{r = \frac{p}{1 + e\cos\theta}} \text{ avec } \begin{cases} e = A.p \\ \boxed{p = \dfrac{\mu C^2}{\mathcal{G}Mm}} \end{cases}$$

**Rq :** Le choix $\varphi = 0$ revient à confondre l'axe polaire avec l'axe focal : $\overrightarrow{e_r}(\theta = 0) = \overrightarrow{e_x}$.

**5)** $r_{\mathsf{max}} = r_A = r(\theta = \pi) = \dfrac{p}{1-e}$

et $r_{\mathsf{min}} = r_P = r(\theta = 0) = \dfrac{p}{1+e}$

Comme $2a \equiv r_A + r_P$,

on a $2a = p\left(\dfrac{1}{1-e} + \dfrac{1}{1+e}\right) p.\dfrac{2}{1-e^2}$, soit : $\boxed{a = \dfrac{p}{1-e^2}}$.

**6)** D'une part la surface de l'ellipse est $S = \pi.a.b$, d'autre part, on peut la calculer sous la forme :

$$S = \int_{\text{trajectoire}} \mathrm{d}S = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}.r.r\mathrm{d}\theta = \int_0^T \frac{r^2}{2}.\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}.\mathrm{d}t = \int_0^T \frac{C}{2}.\mathrm{d}t = \frac{C}{2}.T$$

On a donc : $S = \pi.a.b = \dfrac{C}{2}.T \;\Rightarrow\; \pi^2 a^2 b^2 = \dfrac{C^2}{4}T^2 \;\Rightarrow\; \pi^2 a^3 p = \dfrac{C^2}{4}T^2$

Comme $p = \dfrac{\mu C^2}{\mathcal{G}Mm}$, on en déduit : $\dfrac{a^3}{T^2} = \dfrac{\mathcal{G}Mm}{4\pi^2\mu}$

Comme $\mu = \dfrac{Mm}{M+m}$ et puisque $M \gg m$, on obtient : $\boxed{\dfrac{a^3}{T^2} = \dfrac{\mathcal{G}(M+m)}{4\pi^2} \simeq \dfrac{\mathcal{G}M}{4\pi^2}}$ (3^e loi de Képler, où le lien entre $a$, le demi-grand axe de l'ellipse de la planète, et $T$, sa période de rotation autour du Soleil, est indépendante de la masse $m$ de la planète)