

DM n°7 – Production de froid

CCP-PC 2006 [pour le Ve10/04]

→ Cf Cours T3/T4-App1

Données :

- Les températures T sont en Kelvin, Θ en degrés Celsius.
- Rapport des coefficients thermiques molaires, respectivement isobare et isochores, pour un gaz diatomique, constant dans le régime de température considéré : $\gamma = \frac{C_{Pm}}{C_{Vm}} = \frac{7}{5} = 1,40$.
- Constante des gaz parfaits : $R = 8,31 \text{ J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}$.
- $1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa}$.

1) Détente simple :

Le diazote est assimilé à un gaz parfait diatomique.

1.a) Donner la relation entre pression P , volume V et température T d'une mole de diazote N_2 (équation d'état).

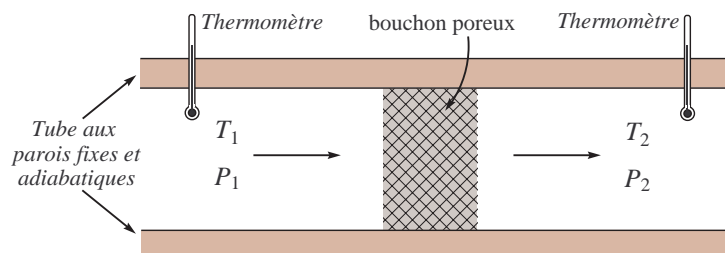
1.b) Que vaut la variation d'énergie interne $\Delta U_{0^\circ\text{C} \rightarrow 25^\circ\text{C}}$ d'une mole de N_2 entre 0°C et 25°C ?

1.c) Une mole de N_2 préalablement comprimée à la pression de 50 bars , et à la température $\Theta_i = 25^\circ\text{C}$, subit une détente adiabatique, brutale et irréversible. La détente s'effectue contre une pression extérieure constante $P_e = 1 \text{ bar}$. En fin de détente, la pression du gaz est de $P_e = 1 \text{ bar}$. Calculer la température Θ_f du gaz en fin de détente, en degrés Celsius et en Kelvin.

1.d) Comparer la température obtenue à la température Θ'_f que l'on aurait obtenue après une détente adiabatique réversible ou quasi-statique de 50 à 1 bar .

2) Détente de Joule-Thomson

Un gaz parfait s'écoule à débit massique constant à travers une paroi poreuse, et sa pression chute d'une valeur P_1 en amont, à une valeur P_2 en aval de la paroi poreuse.



Le tube dans lequel s'effectue la détente est calorifugé, de sorte que les échanges d'énergie thermique avec l'environnement sont négligeables.

On démontre que la détente de Joule-Thomson est isenthalpique, c'est-à-dire que l'enthalpie d'une masse donnée de gaz ne change pas après avoir traversé la paroi poreuse. On se place en régime permanent, avec un débit massique constant.

Définir l'enthalpie H d'une mole de gaz diatomique et exprimer sa valeur en fonction de R et T . Comment évolue la température du gaz qui se détend ?

3) Fluide de Van der Waals

Une mole de fluide de Van der Waals monoatomique est caractérisée par une équation d'état :

$$\left(P + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = RT \quad \text{tandis que son énergie interne est : } U = \frac{3}{2}RT - \frac{a}{V}$$

avec V volume, P pression, T température, R constante des gaz parfaits.

3.a) Interpréter physiquement les paramètres a et b . Déterminer l'enthalpie $H(V, T)$ fonction du volume et de la température.

3.b) Une transformation élémentaire $V \rightarrow V + dV$, $T \rightarrow T + dT$ se fait à enthalpie constante.

Calculer le rapport $\frac{dT}{dV}$ en fonction des dérivées partielles de $H(V, T)$.

En déduire une expression pour la dérivée partielle $\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_H$ à enthalpie constante.

Exprimer le résultat pour le gaz de Van der Waals.

3.c) Pour décrire la détente de Joule-Thomson, il faut déterminer la dérivée $\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_H$, qui découle de l'expression de $H(P, T)$, enthalpie fonction de la pression et de la température. On admet la relation :

$$\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_H = \frac{-\left(\frac{\partial H}{\partial V}\right)_T \left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T}{\left(\frac{\partial H}{\partial V}\right)_T \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P + \left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_V}$$

Rappeler la définition du coefficient de compressibilité isotherme χ_T d'un gaz. En déduire le signe de $\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T$. *On ne demande pas de calculer $\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T$.*

En admettant que le dénominateur de l'expression ci-dessus reste positif, montrer que pour un volume donné, il existe une température $T_{\text{inv}}(V)$ pour laquelle $\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_H$ s'annule en changeant de signe.

Exprimer cette température d'inversion $T_{\text{inv}}(V)$ en fonction de a , b , R et V . En déduire que pour $T < T_{\text{inv}}$ la détente de Joule-Thomson s'accompagne d'un abaissement de la température.

3.d) Application : calculer la température d'inversion $T_{\text{inv}}(\text{He})$ pour le modèle de Van der Waals de l'hélium avec : $a = 3,46 \cdot 10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{m}^6 \cdot \text{mol}^{-2}$, $b = 2,38 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3 \cdot \text{mol}^{-1}$, $V = 2,90 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 \cdot \text{mol}^{-1}$.

La valeur expérimentale de la température d'inversion de l'hélium est de l'ordre de 40 K. Cet effet est mis à profit dans les procédés de liquéfaction des gaz (hélium liquide).

Rép :

1.c) $T_f = \frac{1}{\gamma} \left[1 + \frac{P_e}{P_i} (\gamma - 1) \right] T_i$

1.d) $T'_f = T_1 \left(\frac{P_i}{P_e} \right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}$

3.b) $\left(\frac{\partial H}{\partial V}\right)_T = -\frac{bRT}{(V-b)^2} + \frac{2a}{V}$ et $\left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_V = \frac{5V-3b}{2(V-b)}R$

3.c) $T_{\text{inv}}(V) = \frac{2a}{Rb} \frac{V^2}{(V-b)^2} \left(\simeq \frac{2a}{Rb} \right)$