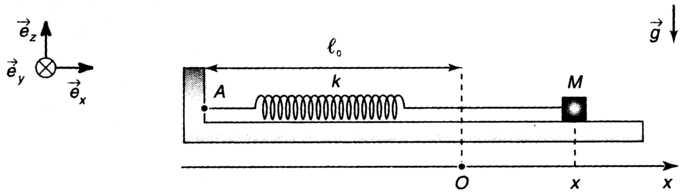
Devoir Surveillé n°3

Ainsi il y a deux manières d'apprendre. Le métier nous habille d'un costume de chair ; disons même de deux costumes de chair. L'offense nous marque. C'est ainsi que la jambe d'Épictète, après que le maître l'eut cassée, resta boiteuse. Or, la jambe du coureur garde le souvenir des courses tout à fait autrement, non en ce qu'elle est faible, mais au contraire en ce qu'elle est forte. La défaite s'inscrit en creux ; la victoire s'inscrit en relief. La grimace reste, par un pli des muscles et des nerfs, ineffaçable comme le pli du papier. Mais, au rebours, le visage se compose par les essais de puissance et par les victoires. Par les mêmes causes l'idée ne grimace plus, ne bégaye plus, ne bute plus ; l'idée faite en prépare d'autres, comme, dans l'athlète, l'action prépare l'action. (Alain, Esquisses de l'homme, LVII)

Partie A : Mécanique

I Oscillateur harmonique amorti : le ressort horizontal

Le référentiel terrestre est supposé galiléen.
Un point matériel M de masse m est lié à un ressort horizontal, l'autre extrémité du ressort étant fixe en A.

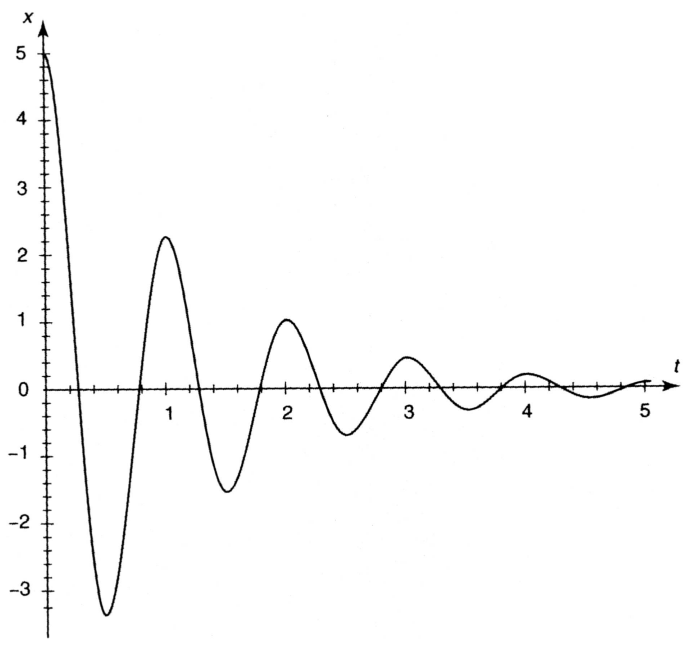


Dans son domaine d'élasticité, le ressort non tendu est caractérisé par une constante de raideur k et une longueur à vide l_0.
Le point M glisse le long de l'axe (Ox) à partir de sa position d'équilibre située en O et est repéré sur cet axe par son abscisse x. Il existe entre le mobile et le support un frottement de type visqueux. La force de frottement est de la forme : $\overrightarrow{F_r} = -h\,\dot{x}\,\overrightarrow{e_x}$, où la constante h est positive.
On posera : $\omega_0^2 = \dfrac{k}{m}$ et $\dfrac{\omega_0}{Q} = \dfrac{h}{m}$. L'oscillateur harmonique est caractérisé par le couple (Q, ω_0).
À l'instant $t = 0$, le mobile est abandonné sans vitesse initiale d'une position x_0 (avec $x_0 \neq 0$).

1) Faire le bilan des forces appliquées au mobile lorsqu'il se trouve en un point d'abscisse x quelconque. Établir l'équation différentielle dont $x(t)$ est solution.

2) Écrire l'énergie mécanique $\mathcal{E}_m$ de M en fonction de x et de $\dot{x}$. Le système est-il conservatif ? Que vaut $\left(\dfrac{\mathrm{d}\mathcal{E}_m}{\mathrm{d}t}\right)$? Retrouver l'équation différentielle du mouvement de M.

3) La figure ci-contre représente l'évolution de x au cours du temps (x est exprimé en cm et t en s).
Le mouvement est oscillatoire amorti.



3.a) Quelle condition sur Q, la nature de ce mouvement implique-t-elle ?

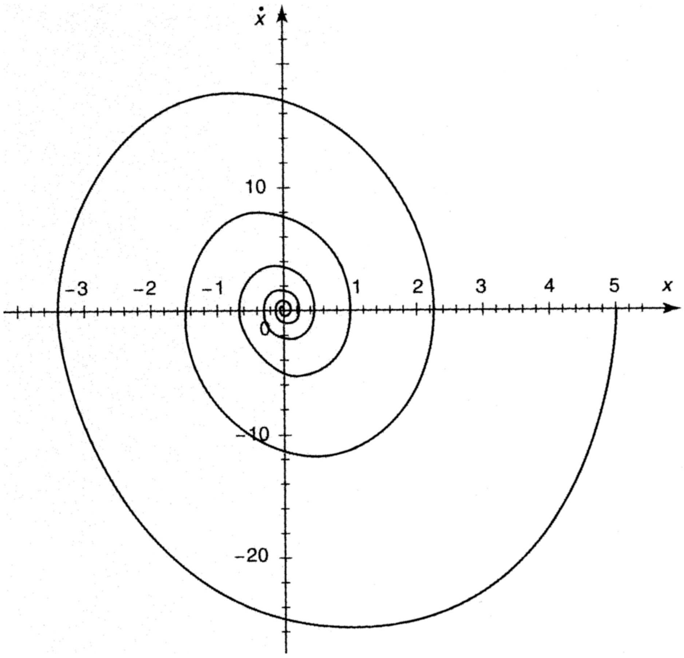
3.b) Déterminer la pseudo-pulsation ω associée à ce mouvement en fonction du facteur de qualité Q et de la pulsation propre ω_0.
En déduire la pseudo-période T des oscillations en fonction de Q et de T_0.

4) Résoudre l'équation différentielle du mouvement en exprimant x en fonction de t, Q, x_0, ω_0 et ω.

5) La décroissance des oscillations est caractérisée par le décrément logarithmique δ défini par la relation : $\delta = \ln\left(\dfrac{x(t)}{x(t+T)}\right)$. Exprimer δ en fonction de Q.

6) La masse m étant de 100 g, exploiter le graphe précédent et déterminer successivement par lecture graphique :
(a) l'élongation initiale x_0 ; (b) la pseudo-période T ; (c) le décrément logarithmique δ.
En déduire :
(d) le facteur de qualité Q ;
(e) la période propre T_0 ;
(f) le cœfficient d'amortissement h ;
(g) la constante de raideur k du ressort.

7) Le portrait de phase de l'oscillateur harmonique amorti est représenté ci-contre dans le plan de phase $(O,\, x,\, \dot{x})$. Déterminer successivement par lecture graphique :
(a) la nature du régime de l'oscillateur ;
(b) la vitesse initiale v_0 ;
(c) l'élongation initiale x_0 ;
(d) l'élongation finale x_F ;
(e) le décrément logarithmique δ.
Vos résultats sont-ils en accord avec l'analyse effectuée en **6)** ?



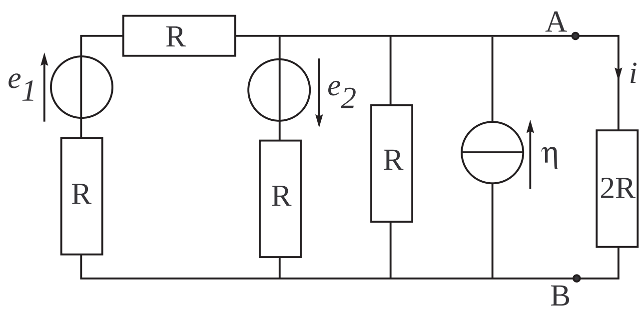
8) En se plaçant dans le cas d'un oscillateur très peu amorti ($Q \gg \dfrac{1}{2}$), montrer que l'énergie mécanique $\mathcal{E}_m(t)$ du système vérifie par approximation :

$$\frac{\mathcal{E}_m(t) - \mathcal{E}_m(t+T)}{\mathcal{E}_m(t)} \simeq \frac{2\,\pi}{Q} \qquad \text{(Rque : On rappelle que pour } x \ll 1 : e^x \simeq 1 + x\text{)}$$

Partie B : Électrocinétique

II Régime continu [d'après CCP, Deug 2006]

Soit un circuit linéaire dont les résistances sont des conducteurs ohmiques, les *f.é.m.* des sources de tension et les *c.é.m* des sources de courant comme sur le circuit ci-contre :



1) Déterminer l'intensité i, en fonction de e_1, e_2, η et R, en appliquant directement la loi des nœuds en termes de potentiels au nœud A.

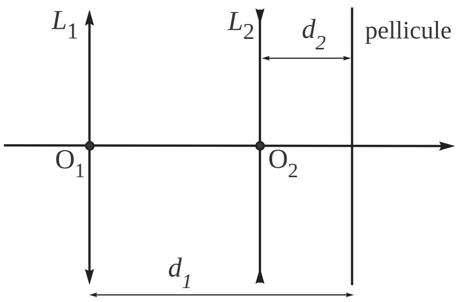
2) Retrouver l'expression de l'intensité i en transformant le circuit en un circuit équivalent (du point de vue de la branche $\{A, R, B\}$) plus simple à étudier.

3) Application numérique : Calculer i pour $e_1 = 20\ V$; $e_2 = 5{,}0\ V$; $\eta = 2{,}0.10^{-2}\ A$; $R = 50\ \Omega$.

Partie C : Optique

III Appareil photographique [Oral TPE 2001, option MP]

Pour l'appareil photographique ci-contre, on donne $f_1' = 4\ cm$, $f_2' = -6\ cm$ et $d_1 = 5\ cm$.



1) Que vaut d_2 pour qu'un point A_∞ situé à l'infini sur l'axe optique donne un point image A' sur le film photo (pellicule) ?

2) Sur la feuille de papier millimétré fournie, tracer alors le trajet de deux rayons issus de A_∞ (en justifiant chacun des tracés, bien entendu).

3) On voit, à l'œil nu, un objet AB étendu, à l'infini, sous un angle α de 1°. Trouver la dimension $\overline{A'B'}$ de l'image sur le film photo.