

# E4 – Réseaux linéaires en régime transitoire / régime permanent continu

## I Définitions

### I.1 Régime libre, régime transitoire et régime continu

◇ **Définition** : On appelle

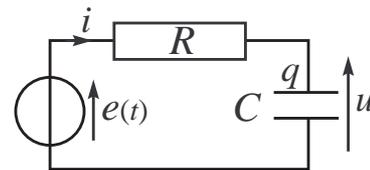
- **réponse libre** ou **régime libre** d'un circuit, l'évolution de celui-ci en l'absence de tout générateur.
- Le régime du circuit est dit **continu** (ou **stationnaire**) lorsque toutes les grandeurs électriques du circuit (intensités, tensions) sont des constantes (du temps).
- Entre le moment où toutes les sources sont éteintes et celui où le régime continu est établi, on a un **régime transitoire**.
- Le réseau étant linéaire, l'évolution de toute grandeur électrique (intensité, tension, charge d'un condensateur...) est décrite par une équation différentielle linéaire à coefficients constants de la forme :

$$D_n \frac{d^n x}{dt^n} + D_{n-1} \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \dots + D_1 \frac{dx}{dt} + D_0 x = f(t)$$

où l'ordre  $n$  de l'équation différentielle définit l'**ordre du circuit**.  
Nous étudierons les circuits d'ordre 1 et d'ordre 2.

**Ex** : Circuit du 1<sup>er</sup> ordre régi par l'équation :

$$RC \frac{du}{dt} + u = e(t)$$



On montre, en mathématiques, que la solution générale d'une telle équation se met toujours sous la forme :

$$u(t) = \underbrace{u_G}_{\text{régime libre (transitoire)}} + \underbrace{u_P}_{\text{régime forcé imposé par la source}}$$

• Où :

-  $u_G$  est la solution générale de l'équation homogène (*i.e.* équation sans second membre) : elle correspond au régime libre du circuit (absence de source de tension ou de courant).

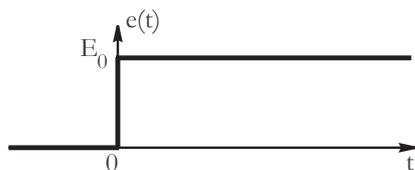
-  $u_P$  est une solution particulière de l'équation avec second membre : elle correspond au régime forcé imposé par la source.

• Tant que  $|u_G(t)| \sim |u_P|$ , on est dans le domaine du régime transitoire.

Lorsque  $|u_G| \ll |u_P|$ , le régime forcé est établi (ici, régime continu).

### I.2 Échelon de tension

Un générateur délivre un échelon de tension lorsque la tension à ses bornes a la forme suivante :



$$\begin{cases} \text{pour } t < 0 : & e(t) = 0 \\ \text{pour } t > 0 : & e(t) = E_0 \end{cases}$$

Une telle tension provoque dans un circuit l'apparition d'un régime transitoire puis d'un régime permanent continu. Cette évolution du circuit porte le nom de **réponse à un échelon de tension** ou **réponse indicelle**.

## II Circuit RL série

### II.1 Étude théorique de l'évolution du courant :

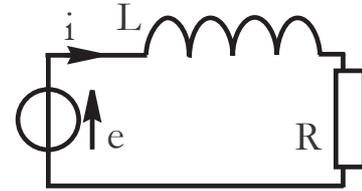
Nous allons étudier la réponse indicielle d'un circuit RL série, puis son régime libre.

#### a Montage :

Dans le circuit ci-contre, la loi des mailles s'écrit :

$$-e + Ri + L \frac{di}{dt} = 0. \text{ Soit : } \boxed{\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = \frac{e(t)}{L}} \quad (E)$$

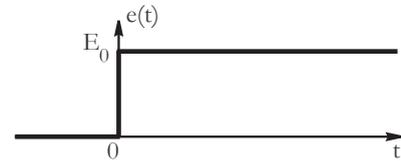
C'est une équation différentielle linéaire du 1<sup>er</sup> ordre à coefficients constants et avec 2<sup>nd</sup> membre.



◇ **Définition :** L'homogénéité de la relation impose  $\tau = \frac{L}{R}$  homogène à un temps : c'est le **temps caractéristique / constante de temps** du circuit RL.

#### b Établissement du courant :

- $e(t)$  est un échelon de tension, soit  $\begin{cases} t < 0 : e(t) = 0 \\ t \geq 0 : e(t) = E_0 \end{cases}$



À  $t \geq 0$ , l'équation différentielle s'écrit :  $\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = \frac{E_0}{L}$  (1)

→ La solution de (1) s'écrit :  $i = i_G + i_P$ .

**Rappel :**  $\frac{dx}{dt} + kx = 0 \Rightarrow x_G = Ae^{-kt}$  avec  $A \in \mathbb{R}$ .

Ici :  $\boxed{i_G = Ae^{-\frac{R}{L}t} = A \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)}$  et  $i_P = cte$  (puisque le second membre de (1) est constant)

Donc  $i_P$  doit vérifier  $\frac{di_P}{dt} + \frac{R}{L}i_P = \frac{E_0}{L}$ , d'où  $\boxed{i_P = \frac{E_0}{R}}$ . Finalement :  $\boxed{i = \frac{E_0}{R} + Ae^{-\frac{R}{L}t}}$ .

- Pour déterminer la constante d'intégration  $A$ , **on a besoin d'une condition initiale (C.I.)**, c'est-à-dire la valeur de l'intensité  $i$  à une date donnée  $t \geq 0$ .

On note la date « Juste avant  $t = 0$  » comme suit :  $t = 0^-$ .

On note la date « Juste après  $t = 0$  » comme suit :  $t = 0^+$ .

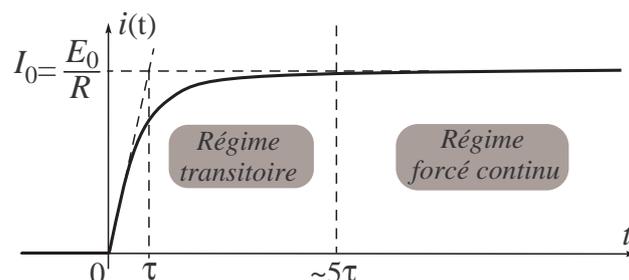
On suppose, par exemple, qu'en  $t = 0^-$  il n'y a aucun courant dans le circuit. La condition initiale s'écrit donc :  $i(0^-) = i_0 = 0$ .

- Or, on sait que *le courant traversant une bobine est une fonction continue du temps* (→ Cf Cours E2-I.2)). → D'où :  $i(0^+) = i(0^-) = i_0 = 0$ , par continuité de l'intensité  $i$ .

On a donc :  $i(0^+) = \begin{cases} i(0^-) = i_0 = 0 \\ i(t=0^+) = \frac{E_0}{R} + Ae^{-\frac{R}{L}0} \end{cases} \Rightarrow \boxed{A = -\frac{E_0}{R}}$ .

**Conclusion :**  $\boxed{i = \frac{E_0}{R}(1 - e^{-\frac{R}{L}t})}$

Lorsque  $t \rightarrow \infty$ ,  $i \rightarrow \frac{E_0}{R} = I_0$  :  
le régime transitoire s'efface et laisse place au régime permanent continu.



- Par suite :  $\frac{di}{dt} = \frac{E_0}{L} e^{-\frac{R}{L}t}$ , soit  $\left(\frac{di}{dt}\right)_{t=0} = \frac{E_0}{L}$

Donc, l'équation de la tangente à la courbe en  $O(0,0)$  est :  $y = \frac{E_0}{L}t$ .

On a  $y = I_0 = \frac{E_0}{R}$  pour  $t = \frac{L}{E_0} \frac{E_0}{R} = \frac{L}{R} = \tau$ .

**■ Propriété :** On se rend compte que  $\tau = \frac{L}{R}$  donne un *ordre de grandeur de la durée du régime transitoire*.

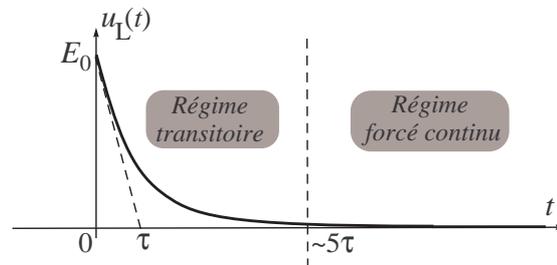
**Ordre de grandeur :**  $\begin{cases} L \simeq 10^{-3} \text{ H} \\ R \simeq 10^3 \Omega \end{cases} \Rightarrow \tau \simeq 10^{-6} \text{ s}$  ... c'est très faible : le régime transitoire «s'éteint» rapidement.

- Représentation de  $u_L$  tension aux bornes de la bobine :  $u_L = L \frac{di}{dt} = L \frac{E_0}{L} e^{-\frac{R}{L}t}$ ,

soit :  $u_L = E_0 e^{-\frac{R}{L}t} = E_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$ .

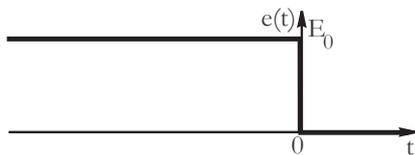
Pendant le régime transitoire, la bobine cherche à 'contrer' la tension du générateur en imposant une tension de sens opposé (loi de LENZ).

En régime établi (régime permanent continu),  $u_L = 0$ . On retrouve qu'en régime continu la bobine se comporte comme un fil conducteur.



### c Extinction de la source (étude du régime libre) :

•



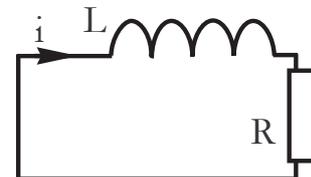
Pour simplifier les calculs, on réinitialise le temps :

$$\begin{cases} \text{pour } t < 0 : & e(t) = E_0 \\ \text{pour } t \geq 0 : & e(t) = 0 \end{cases}$$

- Le montage se ramène alors à  $\rightarrow$

La loi des mailles s'écrit, pour  $t \geq 0$  :  $L \frac{di}{dt} + Ri = 0$  (E).

C'est une équation différentielle linéaire du 1<sup>er</sup> ordre à coefficients constants et sans 2<sup>nd</sup> membre.



- La solution s'écrit :  $i = B e^{-\frac{R}{L}t}$  avec  $B \in \mathbb{R}$ .

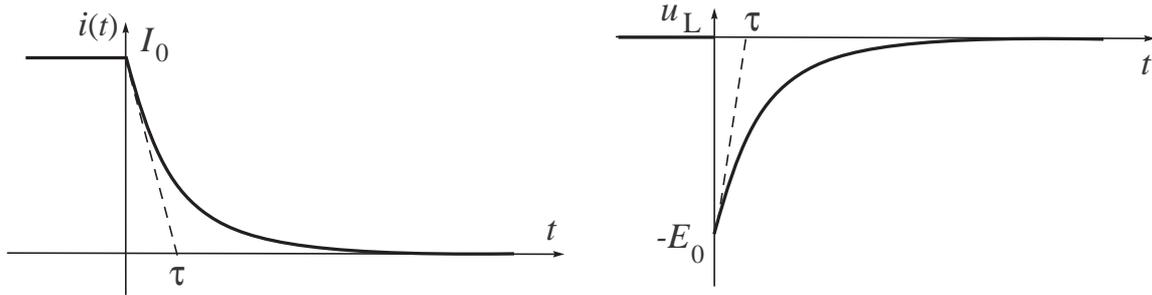
De plus, par continuité de l'intensité traversant la bobine, on a :

$$i(0^+) = \begin{cases} i(0^-) = I_0 = \frac{E_0}{R} \\ i(t=0^+) = B \end{cases} \Rightarrow \text{d'où : } B = \frac{E_0}{R}. \text{ Finalement : } i(t) = \frac{E_0}{R} e^{-\frac{R}{L}t}.$$

**Cl :** donc la tension aux bornes de la bobine est :  $u_L = L \frac{di}{dt} = L \frac{E_0}{R} \left(-\frac{R}{L} e^{-\frac{R}{L}t}\right)$ ,

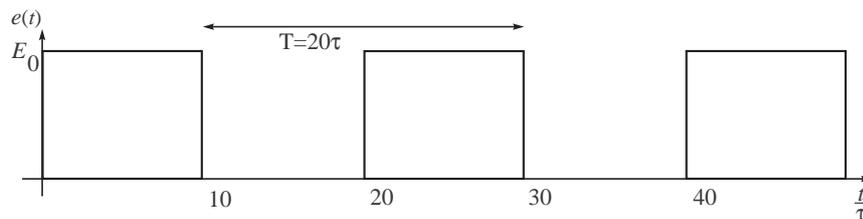
soit :  $u_L = -E_0 e^{-\frac{R}{L}t}$ .

On se rend compte que le **régime libre** est un **régime transitoire** de durée de l'ordre du temps caractéristique du circuit RL série  $\tau = \frac{L}{R}$  : au bout de « quelques »  $\tau$ ,  $i \rightarrow 0$  et  $u_L \rightarrow 0$ .

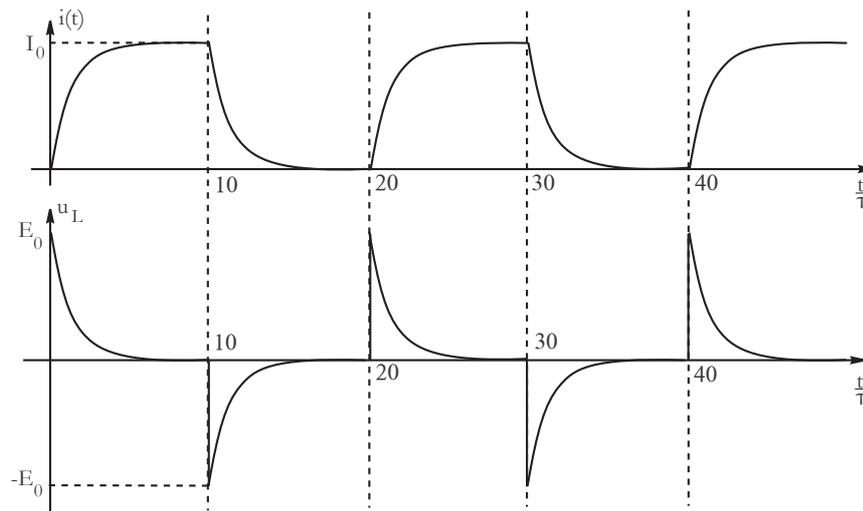


## II.2 Étude expérimentale

- Le GBF délivre un signal « crêteaux » de période  $T \approx 20\tau$ .



- Courbes observées :

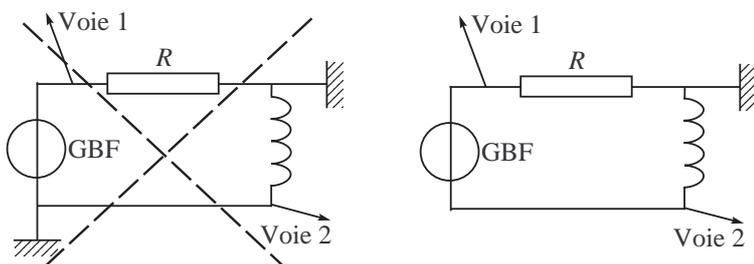


**Rq :** On retrouve que l'intensité traversant une bobine est une fonction continue du temps, ce qui n'est pas le cas de la tension à ses bornes.

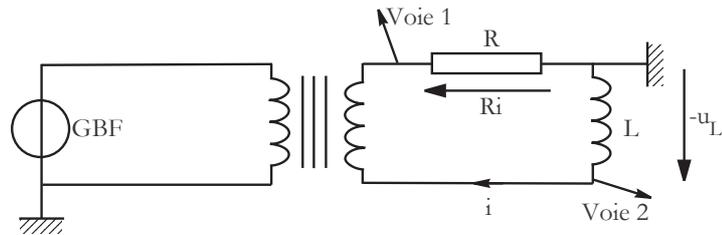
Pour pouvoir observer à la fois  $u_R = Ri$  (afin d'observer une grandeur proportionnelle à  $i$ ) et  $u_L$  en même temps, il faut placer la 'masse' de l'oscilloscope (borne commune aux voies 1 et 2) entre la résistance  $R$  et la bobine  $L$ . Or la masse d'un oscilloscope est une masse 'carcasse' reliée à la TERRE. Ce qui est le cas également de la masse de la plupart des GBF ! Si on ne fait pas attention on risque donc de court-circuiter la bobine (ou la résistance), provoquant une forte intensité et la destruction du composant.

Pour que le montage fonctionne, il faut donc :

- soit utiliser un GBF sans prise de terre (on parle de générateur à « masse flottante » ; cf. ci-contre)



- soit utiliser un transformateur d'isolement (ci-contre)



**Rq :** Pour visualiser  $u_L$  (et non pas  $-u_L$ ) sur la Voie 2 il suffit d'appuyer sur la touche INV de la voie 2 de l'oscilloscope.

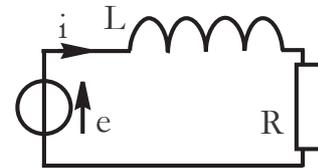
### II.3 Étude énergétique

#### a Puissance instantanée reçue par la bobine :

La puissance fournie par le générateur au reste du circuit vaut :

$$\mathcal{P}_{fournie} = e \cdot i$$

(On suppose la source de tension idéale, donc sans résistance interne.)



D'après la loi des mailles :  $e = Ri + L \frac{di}{dt}$ , d'où :

$$\mathcal{P}_{fournie} = \underbrace{Ri^2}_{\text{puissance dissipée par effet JOULE dans R}} + \underbrace{\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} Li^2 \right)}_{\mathcal{P}_L \text{ puissance reçue par la bobine}}$$

#### b Établissement du courant :

• on définit  $t_0 \gg \tau$ ; ainsi, à la date  $t_0$ , on est en **régime continu**, soit :  $i(t_0) = I$ .

• **Calcul de l'énergie emmagasinée  $\mathcal{E}_L$  par la bobine entre  $t = 0$  et  $t_0$  :**

On a, par définition :  $\mathcal{P}_L = \frac{d\mathcal{E}_L}{dt}$

$$\Rightarrow \mathcal{E}_L = \int_0^{t_0} \mathcal{P}_L dt = \int_0^{t_0} \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} Li^2 \right) dt = \left| \frac{1}{2} Li^2 \right|_0^{t_0} = \frac{1}{2} L \cdot i(t_0)^2 - 0 = \frac{1}{2} LI^2 \Rightarrow \mathcal{E}_L = \frac{1}{2} LI^2$$

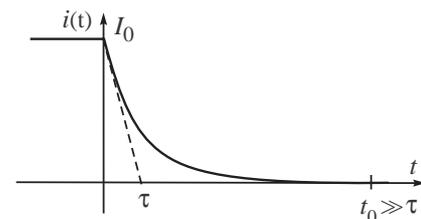
**Propriété :** Cette énergie est stockée dans la bobine *tant qu'on est en régime permanent continu.*

#### c Extinction de la source :

noï • on réinitialise le temps : ainsi, la date  $t = 0$  correspond à l'extinction de la source, soit :  $i(t = 0^-) = I$ .

Cette fois, à  $t = t_0$ , l'intensité est nulle.

• **Calcul de l'énergie  $\mathcal{E}_R$  dissipée dans  $R$  par effet Joule entre  $t = 0$  et  $t_0$  :**



À tout instant  $t$ , on a la relation :  $\mathcal{P}_J = Ri^2 = \frac{d\mathcal{E}_R}{dt}$ .

$$\text{Par suite : } \mathcal{E}_R = |\mathcal{E}_R(t)|_0^{t_0} = \int_0^{t_0} \frac{d\mathcal{E}_R(t)}{dt} dt = \int_0^{t_0} \mathcal{P}_{\text{Joule}} dt = \int_0^{t_0} Ri^2 dt$$

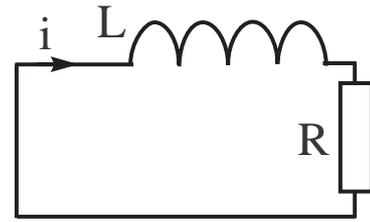
Or le circuit est équivalent au circuit ci-contre.

$$\text{Donc : } Ri = -L \frac{di}{dt} \Rightarrow Ri^2 = -Li \cdot \frac{di}{dt} = -\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} Li^2 \right)$$

Finalement :

$$\mathcal{E}_R = \int_0^{t_0} -\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} Li^2 \right) dt = \left| -\frac{1}{2} Li^2 \right|_0^{t_0} = 0 - \left( -\frac{1}{2} LI^2 \right)$$

$$\text{CI : } \boxed{\mathcal{E}_R = \frac{1}{2} LI^2 = \mathcal{E}_L}$$

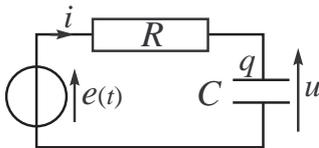


■ **propriété** : Toute l'énergie stockée dans la bobine idéale est **intégralement** restituée et a été (ici) dissipée par effet JOULE.

### III Circuit RC série

#### III.1 Étude théorique de la charge et de la décharge d'un condensateur

a Montage :



La loi des mailles s'écrit :  $-e + Ri + \frac{q}{C} = 0$ , avec  $i = \frac{dq}{dt}$ .

Les deux équations se combinent pour donner :

$$\boxed{\frac{dq}{dt} + \frac{1}{RC}q = \frac{e}{R}}$$

C'est une équation différentielle linéaire du 1<sup>er</sup> ordre à coefficients constants et avec 2<sup>nd</sup> membre.

◇ **Définition** : L'homogénéité de la relation impose  $\tau = RC$  homogène à un temps : c'est le **temps caractéristique / constante de temps** du circuit RC série.

b Mise en fonction de la source :

• Il y a charge du condensateur sous la tension  $e(t)$  telle que :

$$\begin{cases} \text{pour } t < 0 : & e(t) = 0 \\ \text{pour } t \geq 0 : & e(t) = E_0 \end{cases}$$

• Pour  $t \geq 0$ , l'équation différentielle s'écrit :

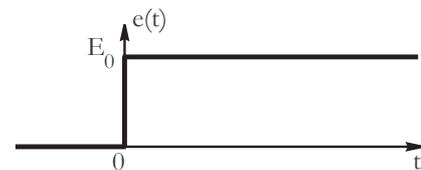
$$\frac{dq}{dt} + \frac{1}{RC}q = \frac{E_0}{R} \quad (1)$$

• La solution de (1) est :  $q = q_G + q_P$  (sol. générale de l'éq. sans 2<sup>nd</sup> membre + sol. particulière de l'éq. avec second membre).

$$\begin{cases} \rightarrow \text{avec : } q_G = \lambda e^{-\frac{t}{RC}} = \lambda \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) & \Rightarrow \text{Soit : } q(t) = \lambda e^{-\frac{t}{RC}} + CE_0 \\ q_P = CE_0 \end{cases}$$

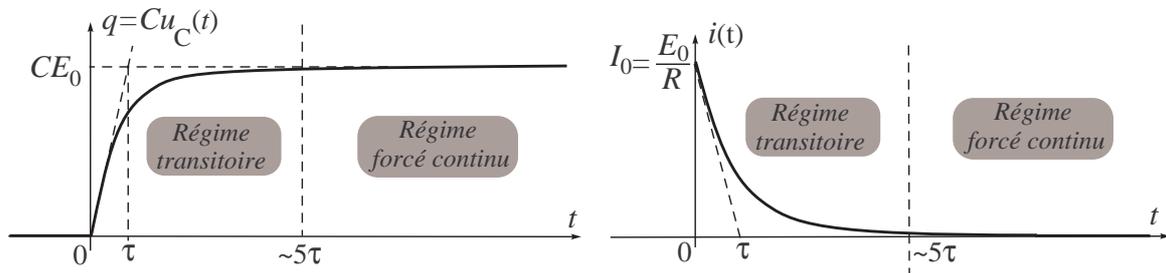
• Pour déterminer  $\lambda$ , on suppose (par exemple) que pour  $t < 0$ , le condensateur n'est pas chargé ( $q(t = 0^-) = q_0 = 0$ ).

• De plus, la **continuité de la charge aux armatures du condensateur** ( $\rightarrow$  Cf Cours E2-II.3) impose :  $q(t = 0^+) = q(t = 0^-)$ .



- Donc :  $q(0^+) = \begin{cases} q(0^-) = 0 \\ q(t=0^+) = \lambda + CE_0 \end{cases} \Rightarrow$  soit :  $\lambda = -CE_0$ .

Ainsi :  $q(t) = CE_0(1 - e^{-\frac{t}{RC}})$  et  $i(t) = \frac{dq}{dt} = I_0 e^{-\frac{t}{RC}}$  avec  $I_0 = \frac{E_0}{R}$

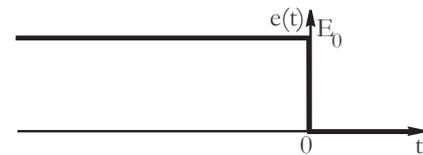


■ **Propriété** : On remarque que le **régime continu** est atteint lorsque le condensateur a atteint sa charge maximale sous la tension  $E_0$  ; alors, le courant ne circule plus.  
 → En régime continu, le condensateur se comporte comme un *interrupteur ouvert*.

### c Extinction de la source :

On réinitialise le temps pour simplifier les calculs :

- Il y a décharge du condensateur lorsque on éteint  $e(t)$  :
 
$$\begin{cases} \text{pour } t < 0 : e(t) = E_0 \\ \text{pour } t \geq 0 : e(t) = 0 \end{cases}$$



Pour  $t \geq 0$ , l'équation différentielle s'écrit :

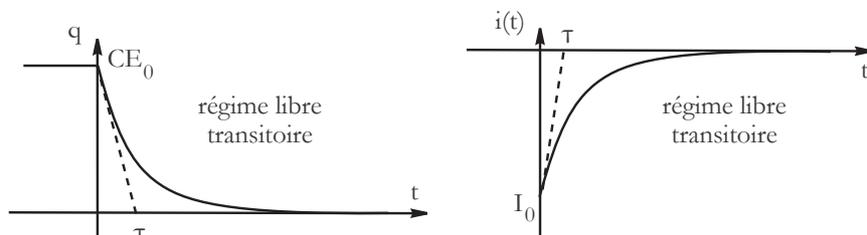
$$\frac{dq}{dt} + \frac{1}{RC}q = 0 \quad (2) \text{ de solution : } q = \mu e^{-\frac{t}{RC}} = \mu \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \text{ avec } \mu \in \mathbb{R}$$

- Détermination de  $\mu$  :

- Pour  $t < 0$ ,  $q = CE_0$  (car on suppose le condensateur complètement chargé sous la tension  $E_0$ ).  
 - Par continuité de la charge, nous obtenons :  $q(t=0^+) = q(t=0^-)$ ,

soit :  $q(t=0^+) = \begin{cases} q(0^-) = CE_0 \\ q(t=0^+) = \mu \end{cases} \Rightarrow$  d'où :  $\mu = CE_0$ .

Ainsi :  $q(t) = CE_0 e^{-\frac{t}{RC}}$  et  $i(t) = \frac{dq}{dt} = -I_0 e^{-\frac{t}{RC}}$  en posant :  $I_0 = \frac{E_0}{R}$ .

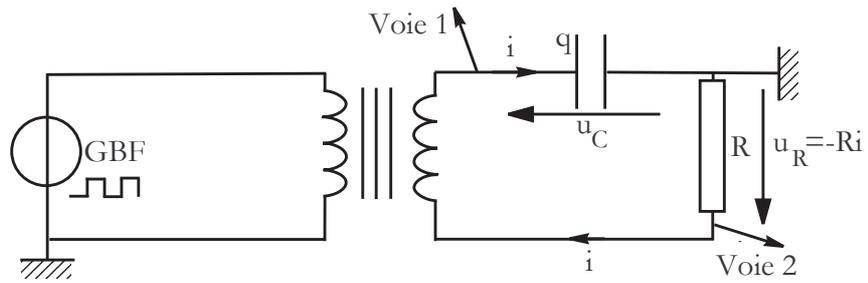


**Rq** :  $i < 0$  car la décharge se fait dans le sens opposé au sens *positif conventionnel* du schéma.

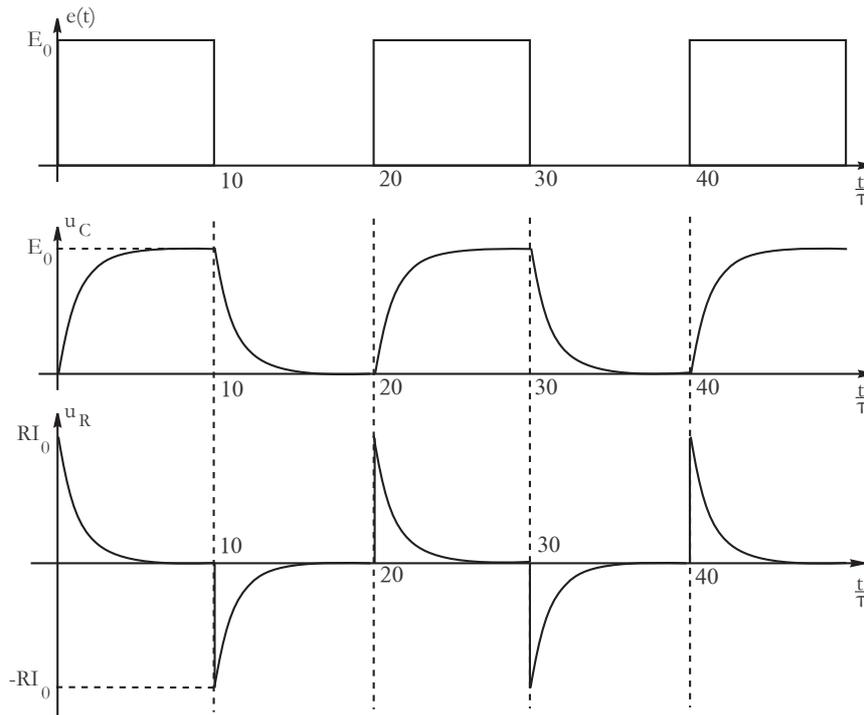
## III.2 Étude expérimentale

- On procède comme pour le circuit ( $RL$ ) : avec un générateur envoyant un signal créneaux de période  $T \cong 20\tau$  et un *transformateur d'isolement* si le générateur a une prise de terre.

Voie 1 :  $u_C = \frac{q}{C}$   
 Voie 2 :  $u_R = -Ri$   
 pour visualiser  $-u_R$ ,  
 c'est-à-dire  $i = \frac{dq}{dt}$ , on  
 appuie sur la touche  
 INV (ou +/-) de l'os-  
 cilloscope.



- On visualise ainsi les charges et les décharges du condensateur par l'intermédiaire de  $u_C$  et le courant grâce à  $u_R$ .



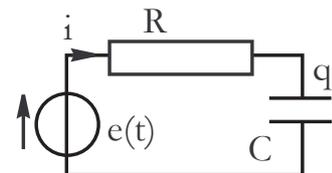
■ **Propriété** : On constate que  $q$  est une fonction continue du temps alors que  $i$  subit des discontinuités.

### III.3 Étude énergétique

La puissance fournie au circuit par le générateur, de résistance interne négligeable, vaut :

$$\mathcal{P}_f(t) = e(t)i(t) = \left(Ri + \frac{q}{C}\right) i$$

avec  $i = \frac{dq}{dt}$ , il vient :  $qi = q \frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} q^2 \right)$ .



$$\longrightarrow \text{d'où : } \mathcal{P}_f = \underbrace{Ri^2}_{\text{dissipée par effet JOULE ds R}} + \underbrace{\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} \frac{q^2}{C} \right)}_{\text{emmagasinée dans C à la date t}}$$

**a Charge du condensateur :**

- On calcule l'énergie *emmagasinée* par le condensateur entre  $t = 0$  et  $t = t_0$  avec  $t_0 \gg t$ .

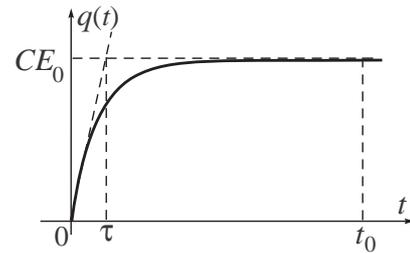
Par définition, l'énergie emmagasinée  $\mathcal{E}_C$  entre  $t = 0$  et  $t_0$  est la *variation d'énergie électrostatique*  $\mathcal{E}_C(t) = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C}$  du condensateur :

$$\mathcal{E}_C = \Delta_{0 \rightarrow t_0} \mathcal{E}_C(t) = \mathcal{E}_C(t_0) - \mathcal{E}_C(0) = \frac{1}{2} C E_0^2 - 0,$$

ou encore :

$$\mathcal{E}_C = \Delta_{0 \rightarrow t_0} \mathcal{E}_C(t) = \int_0^{t_0} d\mathcal{E}_C(t) = \int_0^{t_0} \mathcal{P}_{\text{reçue par } C} dt$$

$$\text{Donc : } \mathcal{E}_C = \int_0^{t_0} \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} \frac{q^2}{C} \right) dt = \int_0^{t_0} d \left( \frac{1}{2} \frac{q^2}{C} \right) = \left| \frac{1}{2} \frac{q^2}{C} \right|_0^{t_0}, \text{ soit : } \boxed{\mathcal{E}_C = \frac{1}{2} C E_0^2}$$



**Propriété :** Cette énergie  $\mathcal{E}_C$  est **emmagasinée** par le condensateur : elle n'est pas dissipée (perdue), mais **stockée** tant que le régime est **continu**.

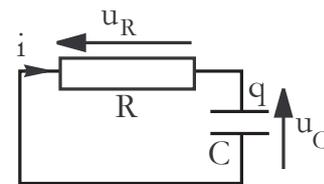
**b Décharge du condensateur :**

- Pour simplifier le problème, on réinitialise le temps au début de la décharge ( $t = 0$  est désormais l'instant où on éteint la source qui auparavant avait chargé le condensateur à sa charge maximale  $CE_0$ ).

- La loi des mailles donne  $u_R + u_C = 0$ , soit :  $u_R = -u_C = -\frac{q}{C}$ .

La puissance reçue par la résistance  $R$  pendant la décharge vaut :

$$\mathcal{P}_{\text{reçue par } R}(t) = u_R i = -\frac{q}{C} i = -\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} \frac{q^2}{C} \right).$$



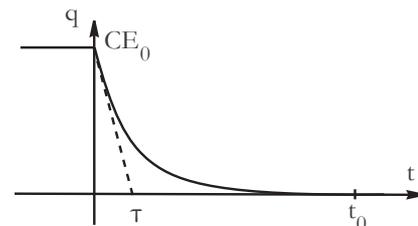
Cette puissance reçue est intégralement dissipée par effet JOULE.

- L'énergie dissipée par effet JOULE entre les instants  $t = 0$  et  $t_0$  – c'est-à-dire du début à la fin de la décharge, est donc l'énergie reçue par la résistance,  $\mathcal{E}_R$ , entre  $t = 0$  et  $t_0$  avec :

$$\mathcal{P}_J = \mathcal{P}_{\text{reçue par } R} = \frac{d\mathcal{E}_R}{dt};$$

$$\text{d'où : } \mathcal{E}_R = \int_0^{t_0} \mathcal{P}_J dt = \int_0^{t_0} -\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} \frac{q^2}{C} \right) dt = \left| -\frac{1}{2} \frac{q^2}{C} \right|_0^{t_0}$$

$$\text{Finalement : } \boxed{\mathcal{E}_R = \frac{1}{2} C E_0^2 = \mathcal{E}_C}.$$



**Propriété :** Lors de la décharge du condensateur, toute l'énergie stockée est dissipée dans la résistance par effet JOULE.

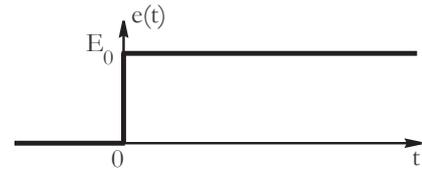
**Application :** Une telle énergie peut servir à actionner le flash d'un appareil photo ou un moteur par exemple.

## IV Circuit RLC série



## IV.2 Réponse indicielle d'un circuit RLC Série (réponse à un échelon de tension)

- dans tout ce paragraphe, on suppose le condensateur initialement déchargé :  $q(t = 0^-) = q(t = 0^+) = q_0 = 0$ .
  - On ferme l'interrupteur  $K$  à l'instant  $t = 0$ .
- la tension  $u(t)$  aux bornes du circuit (RLC) série est un échelon de tension.



- $\forall t$ , on applique la loi des mailles :

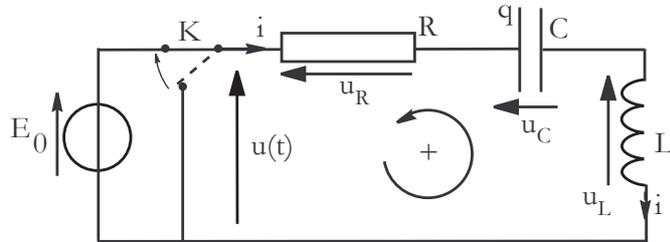
$$-u(t) + Ri + \frac{q}{C} + L \frac{di}{dt} = 0; \text{ avec } i =$$

$$\frac{dq}{dt}, \text{ soit :}$$

$$L \frac{d^2q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = u(t)$$

→ Ainsi :

$$\boxed{\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC} q = \frac{u(t)}{L}} \Leftrightarrow \boxed{\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = \frac{u(t)}{L}} \quad (E)$$



Le circuit est régi par une équation différentielle du  $2^{nd}$  ordre à coefficients constants avec  $2^{nd}$  membre.

- Pour  $t \geq 0$ , on peut écrire :  $\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = \frac{E_0}{L}$  (E).

→ Solution générale de (E) :  $q(t) = q_G(t) + q_P(t)$ , avec :

-  $q_G \equiv$  **solution générale de l'équation sans  $2^{nd}$  membre** ; elle correspond au régime *libre* du circuit (RLC) qui est *transitoire* → Cf. IV.1 ;

-  $q_P \equiv$  **solution particulière de l'équation avec  $2^{nd}$  membre** ; ce second membre traduit la présence d'une source qui impose un régime *forcé* au circuit (RLC) ; si la *f.é.m.* est continue, ce régime forcé est *permanent continu*.

- On cherche  $q_P$  sous la forme d'une fonction constante puisque le  $2^{nd}$  membre est constant ; (E) devient :

$$0 + 0 + \omega_0^2 q_P = \frac{E_0}{L} \quad \Leftrightarrow \quad q_P = \frac{E_0}{\omega_0^2 L} = CE_0 \quad \text{Soit : } \boxed{q_P = CE_0}$$

- **Trois cas se présentent pour la solution  $q_G$**  : ils correspondent aux trois régimes libres transitoires possibles :

$\alpha$ ) Régime libre aperiodique ;  $\beta$ ) Régime libre critique et  $\gamma$ ) régime libre pseudo-périodique

- **Exemple : cas  $\gamma$** ) le régime libre transitoire est pseudo-périodique :  $\Delta < 0$  et  $\boxed{Q > \frac{1}{2}}$ .

Les racines de l'équation caractéristique de l'équation sans  $2^{nd}$  membre sont des *racines complexes conjuguées*, qu'on peut écrire sous la forme  $r_{1/2} = -\frac{1}{\tau} \pm j\omega$  - et donc :

$$\boxed{q_G(t) = (A \cos \omega t + B \sin \omega t) \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)} \quad \text{avec : } \tau = \frac{2Q}{\omega_0} \text{ et } \omega = \frac{\omega_0}{2Q} \sqrt{4Q^2 - 1} = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$$

→ Alors, la solution générale de (E) s'écrit :

$$\begin{aligned} q(t) &= p_P + q_G(t) = CE_0 + (A \cos \omega t + B \sin \omega t) \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \\ \rightarrow i(t) &= \left[ \left(B\omega - \frac{A}{\tau}\right) \cos \omega t - \left(A\omega - \frac{B}{\tau}\right) \sin \omega t \right] \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \end{aligned}$$

Dans les expressions précédentes,  $A$  et  $B$  sont deux constantes d'intégration fixées par les Conditions Initiales; choisissons le cas initial suivant :  $\{q(0^-) = q_0 = 0 ; i(0^-) = i_0 = 0\}$ . Dès lors :

- la conservation de la charge aux bornes du condensateur se traduit par :

$$q(0^+) = \begin{cases} q(0^-) = q_0 = 0 \\ q(t=0^+) = CE_0 + A \end{cases} \Rightarrow \boxed{A = -CE_0}$$

- la conservation de l'intensité traversant la bobine se traduit par :

$$i(0^+) = \begin{cases} i(0^-) = i_0 = 0 \\ i(t=0^+) = -\frac{A}{\tau} + B\omega \end{cases} \Rightarrow \boxed{B = \frac{A}{\tau\omega} = \frac{CE_0}{\tau\omega}}$$

Enfinement : 
$$\boxed{q(t) = CE_0 \left[ 1 - \left( \cos \omega t + \frac{1}{\tau\omega} \sin \omega t \right) \exp \left( -\frac{t}{\tau} \right) \right]} \quad (*) \quad \text{Cf. Doc 10 et 12.}$$

**Rq1** : On peut remarquer que :  $\tau\omega = \sqrt{4Q^2 - 1}$ .

**Rq2** : Cf. Doc 9 et 11 pour les cas  $\alpha$ ) et  $\beta$ ).

L'expression finale de  $q(t)$  permet de retrouver celle de l'intensité dans le circuit :

$$i = \frac{dq}{dt} = -CE_0 \left[ \left( -\frac{1}{\tau} + \frac{1}{\tau} \right) \cos \omega t + \left( -\omega - \frac{1}{\tau^2\omega} \right) \sin \omega t \right] \exp \left( -\frac{t}{\tau} \right)$$

Soit : 
$$\boxed{i(t) = CE_0 \exp \left( -\frac{t}{\tau} \right) \left( \omega + \frac{1}{\tau^2\omega} \right) \sin \omega t} \quad (**)$$

**Rq3** : Cf. Doc 14 où l'évolution de  $i(t)$  est donnée par  $u_R(t)$  (et Doc 13 pour le cas  $\alpha$ )).

#### • Commentaires :

##### (1)

On peut prévoir, avant de faire les calculs, les valeurs des grandeurs, une fois le régime transitoire passé, car le régime est alors continu.

- En régime **continu**, le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert

→ D'où :  $\boxed{i = 0}$  et donc  $u_R = Ri = 0 \text{ V}$  pour  $t \gg \tau$ .

- En régime **continu**, la bobine se comporte comme un fil, donc la tension à ses bornes est nulle :

$u_L = 0 \text{ V}$  et on a :  $E_0 = u_R + u_C + u_L = u_C = \frac{q}{C}$  → Soit :  $\boxed{q = CE_0}$  pour  $t \gg \tau$ .

**CI** : Ceci correspond bien au comportement asymptotique de (\*) et (\*\*)!  
Toujours penser à vérifier ce comportement par cette méthode simple.

##### (2)

On déduit de la remarque précédente que  $\tau = \frac{2Q}{\omega_0} = \frac{2L}{R}$  est bien l'ordre de grandeur de la **durée du régime transitoire**.

### IV.3 Étude énergétique

#### a En régime libre :

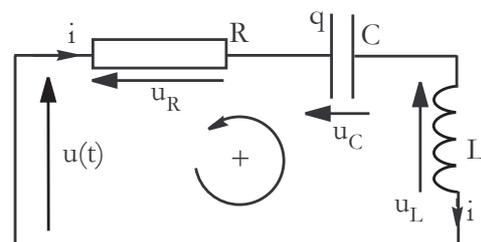
•  $\forall t$ , on applique la loi des mailles :

$$u_R + u_C + u_L = 0 \Leftrightarrow Ri + \frac{q}{C} + L \frac{di}{dt} = 0$$

avec  $i = \frac{dq}{dt}$ .

En multipliant l'équation par  $i$  :

$$Ri^2 + \frac{q}{C} \frac{dq}{dt} + Li \frac{di}{dt} = 0$$



Soit :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} \frac{q^2}{C} + \frac{1}{2} Li^2 \right) = -Ri^2$$

On a vu que :

-  $\mathcal{E}_C(t) = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C}$  est l'énergie électrostatique emmagasinée par le condensateur à l'instant  $t$  ;

- et  $\mathcal{E}_L(t) = \frac{1}{2} Li^2$  est l'énergie emmagasinée par la bobine à l'instant  $t$  ;

→ Donc  $\mathcal{E}(t) \equiv \mathcal{E}_C(t) + \mathcal{E}_L(t)$  est l'énergie emmagasinée dans le condensateur et la bobine à l'instant  $t$ .

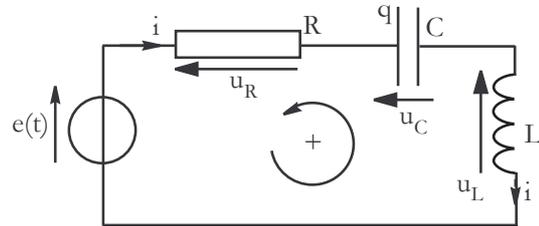
**Conclusion :** Lors du régime libre, l'énergie emmagasinée  $\mathcal{E}(t)$  diminue au cours du temps : elle est dissipée par effet JOULE dans la résistance  $R$ .

$$\frac{d\mathcal{E}(t)}{dt} = -Ri^2 < 0$$

### b Circuit RLC série branché sur un générateur :

- Loi des mailles :  $-e + Ri + \frac{q}{C} + L \frac{di}{dt} = 0$ .

En multipliant chaque membre de cette équation par l'intensité  $i$ , il apparaît la puissance fournie par le générateur (supposé idéal) au reste du circuit :



$$\mathcal{P}_f = ei = Ri^2 + \frac{q}{C} \frac{dq}{dt} + Li \frac{di}{dt}$$

Soit :

$$\mathcal{P}_f = Ri^2 + \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} \frac{q^2}{C} + \frac{1}{2} Li^2 \right) = \mathcal{P}_J + \frac{d}{dt} (\mathcal{E}_C(t) + \mathcal{E}_L(t)) = \mathcal{P}_J + \frac{d\mathcal{E}(t)}{dt}$$

• Remarque : Nous n'avons pas supposé que la *f.é.m.* était continue; a priori elle peut être variable. Mais bien sûr, en régime permanent continu ( $e(t) = E_0$ ), la relation précédente est vérifiée : - au bout de quelques  $\tau$ ,  $i = 0$ , c'est-à-dire :

-  $\mathcal{P}_J = 0$  et de même  $\mathcal{P}_f = 0$ ,

- et comme  $\mathcal{E}(t) = \frac{1}{2} CE_0^2$ , on a également :  $\frac{d\mathcal{E}}{dt} = 0$ .

## IV.4 Retour sur le facteur de qualité $Q$ et le régime pseudo-périodique

### a Facteur de qualité $Q$ :

- $Q = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{1}{RC\omega_0}$  → ainsi :  $Q \searrow$  lorsque  $R \nearrow$ .

- En régime *libre*, nous avons vu que :  $\frac{d\mathcal{E}}{dt} = -Ri^2 = -\frac{L\omega_0}{Q} \cdot i^2$

→ Il apparaît que pour des expériences de durées  $\Delta t$  identiques, la perte d'énergie emmagasinée du circuit  $|\Delta\mathcal{E}| \nearrow$  lorsque  $R \nearrow$ , c'est-à-dire lorsque  $Q \searrow$ .

→ Donc :

- plus  $R$  est grand et plus le circuit est *amorti*, plus il perd rapidement son énergie ;
- plus  $Q$  est grand et moins le circuit perd rapidement son énergie.

■  $Q$ , facteur de qualité du circuit ( $RLC$ ) est un nombre sans dimension qui permet d'évaluer la capacité du circuit à conserver l'énergie qu'il a emmagasinée.

**b Pertes relatives d'énergie pour un RLC série en régime libre pseudo-périodique sur une pseudo-période :**

- $\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_C(t) + \mathcal{E}_L(t) = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C} + \frac{1}{2} Li^2.$

- Perte d'énergie sur une pseudo-période :  $|\Delta\mathcal{E}| = \mathcal{E}(t) - \mathcal{E}(t+T).$

Perte d'énergie *relative* sur une pseudo-période :  $\frac{|\Delta\mathcal{E}|}{\mathcal{E}}.$

- À chaque instant  $t$ , on a :  $i(t+T) = i(t) \exp\left(-\frac{T}{\tau}\right)$  et  $q(t+T) = q(t) \exp\left(-\frac{T}{\tau}\right)$

→ d'où :

$$\mathcal{E}(t+T) = \frac{1}{2} \frac{q^2(t+T)}{C} + \frac{1}{2} Li^2(t+T) = \left[ \frac{1}{2} \frac{q^2(t)}{C} + \frac{1}{2} i^2(t) \right] \exp -\frac{2T}{\tau} = \mathcal{E}(t) \exp\left(-\frac{2T}{\tau}\right)$$

→ d'où :

$$\frac{|\Delta\mathcal{E}|}{\mathcal{E}(t)} = \frac{\mathcal{E}(t) - \mathcal{E}(t+T)}{\mathcal{E}(t)} = 1 - e^{-\frac{2T}{\tau}}$$

**Rappel de maths :**  $|x| \ll 1 \rightarrow e^x \simeq 1 + x.$

Dans le cas des « grands » facteurs de qualité<sup>1</sup>, on a  $T \equiv \frac{2\pi}{\omega} = T_0 \frac{2Q}{\sqrt{4Q^2 - 1}} \simeq T_0,$

ce qui permet d'écrire :  $\frac{2T}{\tau} \simeq \frac{2T_0}{2Q} = \frac{\omega_0 T_0}{Q} = \frac{2\pi}{Q}.$

Donc, pour  $Q \gg 2\pi$  :  $e^{-\frac{2T}{\tau}} \simeq e^{-\frac{2\pi}{Q}} \simeq 1 - \frac{2\pi}{Q} \rightarrow$  D'où :  $\frac{|\Delta\mathcal{E}|}{\mathcal{E}} \simeq \frac{2\pi}{Q}$

1. il suffit d'avoir  $Q > 4$  comme on l'a vu en **IV.1.a.γ**), Remarque(4).