E5 – Réseaux linéaires en régime sinusoïdal forcé

I Régime Sinusoïdal Forcé

I.1 Régime transitoire et régime permanent

a Régime libre et régime permanent :

• L'étude d'un circuit linéaire conduit à résoudre une équation différentielle linéaire à cœfficients constants du type :

$$D_2 \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + D_1 \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + D_0 x = f(t) \qquad (E)$$

Pour un circuit d'ordre 2 : $D_2 \neq 0$; pour un circuit d'ordre 1 : $D_2 = 0$.

• Solution de (E) : $x(t) = x_G(t) + x_P(t)$.

$\rightarrow x_G \equiv$ **solution générale de l'équation sans 2nd membre** (équation homogène).
Elle dépend des **conditions initiales**.
Elle correspond au régime **libre** du circuit qui est généralement **transitoire** (➜ Cf **I.1.b)**).

$\rightarrow x_P \equiv$ **solution particulière de l'équation avec 2nd membre** ; ce second membre traduit la présence d'une source qui impose un régime **forcé** au circuit.
On parle de régime **forcé** mais aussi de régime **permanent** ou **établi**.
La nature de la **réponse** ($x_P(t)$) dépend de **l'excitation** ($f(t)$, source).
Par contre, la réponse $x_P(t)$ *ne* dépend *pas* des conditions initiales.

•
- $f(t) = cte$ $\longrightarrow$ Régime forcé **continu** (ou **stationnaire**) ➜ Cf Cours **E4**.
- $f(t)$ variable $\longrightarrow$ Régime forcé **variable**.
- $f(t)$ sinusoïdale $\longrightarrow$ Régime **sinusoïdal** forcé ou régime **harmonique**

❚ Propriété : Si l'excitation est harmonique, alors la réponse $x_P(t)$ est harmonique et de même pulsation que l'excitation :

$$\boxed{f(t) = F_m \cos(\omega t + \varphi_f)} \Longrightarrow \boxed{x_P(t) = X_{Pm} \cos(\omega t + \varphi_x)}$$

avec X_{Pm} et φ_x qui ne dépendent que de l'excitation (F_m et φ_f) seulement.

Rq1 : à $t = 0$, on a : $x_P(t) = X_{Pm} \cos \varphi_x$

♢ **Définition :** φ_x s'appelle **la phase de x_P à l'origine des temps**.
Alors que $(\omega t + \varphi_x)$ est la **phase** de x_P à l'instant t.

Rq2 : Pour que la réponse du circuit $x(t)$ soit sinusoïdale (lorsque le régime forcé est sinusoïdal) il faut que le régime libre du circuit soit transitoire. Alors, $x(t) = x_G(t) + x_P(t) \longrightarrow x_P(t)$ et au bout de quelques τ, durée caractéristique du régime transitoire, on a : $x(t) = x_P(t)$.

b Condition pour que le régime libre soit transitoire :

➜ Cf Cours

IV Circuit RLC en régime sinusoïdal forcé

.

IV.5 Résonance en tension et « Surtension »

• On a $\underline{u}_C(t) = U_{Cm}e^{j\varphi_C}e^{j\omega t} = \underline{U}_C e^{j\omega t}$. On s'intéresse à $U_{Cm}(\omega)$:

$$\underline{U}_C = \underline{Z}_C \underline{I} = \frac{1}{jC\omega}.\frac{\underline{E}}{\underline{Z}} = \frac{1}{jC\omega}.\frac{\underline{E}}{R + j(L\omega - \frac{1}{C\omega})} = \frac{\underline{E}}{1 - LC\omega^2 + jRC\omega} = \frac{\underline{E}}{1 - x^2 + j\frac{x}{Q}} = \frac{\underline{N}}{\underline{D}}$$

$$\boxed{U_{Cm}(\omega) = \frac{E_m}{\sqrt{(1-x^2)^2 + \left(\frac{x}{Q}\right)^2}} = \frac{E_m}{D}} \quad \boxed{\varphi_C = \arg(\underline{U}_C) = \arg \underline{N} - \arg \underline{D} = -\arg\left(1 - x^2 + j\frac{x}{Q}\right)}$$

• Il y a **résonance en tension** si $U_{Cm}(\omega)$ admet un maximum, c'est-à-dire si le carré du dénominateur D admet un minimum :

$$f(x) = D^2 = (1-x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2} = x^4 + \left(\frac{1}{Q^2} - 2\right)x^2 + 1$$

sa dérivée est :

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = 4x^3 + 2\left(\frac{1}{Q^2} - 2\right)x = 4x\left(x^2 + \left(\frac{1}{2Q^2} - 1\right)\right)$$

Elle s'annule pour $x = 0$ (régime continu ; inintéressant ici), et pour $x_r = \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}} > 0$ (nécessairement positif). Cette valeur non nulle de x_r correspond à la **pulsation de résonance de la tension** :

$$\boxed{\omega_r = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}} \ \textbf{(*)} \text{ dans ce cas où } \boxed{Q > \frac{1}{\sqrt{2}}} \rightarrow \text{ alors : } \boxed{U_{Cm}(max) = \frac{E_m Q}{\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}}}$$

• La résonance en tension (« surtension »), lorsqu'elle a lieu (*i.e.* pour $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$), se produit à une pulsation inférieure à la pulsation propre (il suffit de regarder **(*)**).
Mais, pour un facteur de qualité élevé, c'est-à-dire, pour un faible amortissement , on a $\omega_r \simeq \omega_0$ et alors :

$$U_{Cm}(max) \simeq E_m Q$$

($\rightarrow$ On retrouve, bien entendu, la surtension définie en **5)** comme la tension aux bornes du condensateur (ou de la bobine) à la résonance en intensité.)

• **Courbes :**

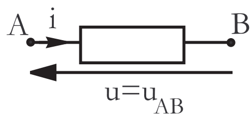
V Puissance en régime sinusoïdal forcé

V.1 Puissance moyenne

◇ **Définition :** Pour une grandeur périodique, $g(t)$, la moyenne temporelle est définie par : $\boxed{< g >= \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} g(t)dt}$ avec t_0 une date quelconque et T la période de g.

• Appliquons cette définition à la puissance électrique moyenne reçue par un dipôle en régime sinusoïdal, pour un dipôle AB , avec :

$i = i_{A\to B} = I_m \cos(\omega t + \varphi_i)$ et $u_{AB} = U_m \cos(\omega t + \varphi_u)$,
la valeur moyenne de la puissance électrique reçue par le dipôle vaut :
$< \mathcal{P} >=< i_{A\to B} u_{AB} >=< I_m U_m \cos(\omega t + \varphi_i) \cos(\omega t + \varphi_u) >$



Soit : $< \mathcal{P} >= \frac{I_m U_m}{2}[\underbrace{< \cos(\varphi_u - \varphi_i) >}_{\text{constante}} + \underbrace{< \cos(2\omega t + \varphi_i + \varphi_u) >}_{\text{0 car moy. temp. d'une fonction sinusoïdale}}]$

◇ **Définition :** La puissance électrique moyenne reçue par un dipôle en régime sinusoïdal s'écrit : $\boxed{< \mathcal{P} >= \frac{U_m I_m}{2} \cos\phi}$ avec $\phi \equiv \varphi_u - \varphi_i$.

Elle s'exprime en watts (W), on parle de **puissance active**.

Le cœfficient $\boxed{S = \frac{U_m I_m}{2}}$ s'appelle la **puissance apparente** (en $V.A$).

Le facteur $\boxed{\cos\phi}$ s'appelle le **facteur de puissance**.

• **Autres expressions utiles de la puissance active** $< \mathcal{P} >$ **et du facteur de puissance** $\cos\phi$ **:**
On se place en régime sinusoïdal (= harmonique).
Soit un dipôle linéaire d'**impédance** : $\underline{Z} = \frac{\underline{U}_{AB}}{\underline{I}} = R(\omega) + jX(\omega) = Ze^{j\phi} = Z(\cos\phi + j\sin\phi)$
avec $\phi = \varphi_u - \varphi_i$.

On en déduit : $\boxed{\cos\phi = \frac{R}{Z}}$

On peut aussi utiliser l'**admittance** : $\underline{Y} = \frac{\underline{I}}{\underline{U}_{AB}} = G + jB = \frac{1}{Z}e^{-j\phi} = Y(\cos\phi - j\sin\phi)$.

On en déduit : $\boxed{\cos\phi = \frac{G}{Y}}$

Si on exprime la puissance apparente S en fonction de Z ou Y :

$$U_m \equiv Z(\omega) I_m \Rightarrow \frac{U_m I_m}{2} = \frac{Z I_m^2}{2} \quad \text{ou encore} \quad I_m \equiv Y(\omega) U_m \Rightarrow \frac{U_m I_m}{2} = \frac{Y U_m^2}{2}$$

D'où $< \mathcal{P} >= S\cos\phi$ s'écrit également : $\boxed{< \mathcal{P} >= \frac{R I_m^2}{2} = \frac{G U_m^2}{2}}$

• **Conséquences :**
(1) Pour une bobine ou un condensateur, $R = 0$, donc : $< \mathcal{P} >= 0$.
En régime sinusoïdal, *en moyenne*, une bobine ou un condensateur ne consomme pas d'énergie : ils restituent, *en moyenne*, autant d'énergie qu'ils en reçoivent.
(2) Un dipôle passif se comporte toujours en récepteur : sa puissance active (= puissance moyenne reçue en régime sinusoïdal) est positive, donc $R > 0$ et $G > 0$.
→ les parties réelles de l'impédance et de l'admittance d'un dipôle linéaire *passif* sont toujours positives.

V.2 Grandeurs Efficaces

◇ **Définition** : pour une grandeur $g(t)$, la valeur efficace est définie par : $G_{\text{eff}} = \sqrt{< g^2 >}$ [a] .

[a]. On prend la racine de la valeur moyenne du carré de la grandeur ; voilà pourquoi les anglosaxons parle de RMS pour Root (racine), Mean (moyenne) et Square (carré).

• **Cas du régime sinusoïdal** : $i = I_m \cos(\omega t + \varphi_i)$

$$\rightarrow I_{\text{eff}}^2 =< I_m^2 \cos^2(\omega t + \varphi_i) >=< \frac{I_m^2}{2}(1 + \cos(2\omega t + \varphi_i)) >= \frac{I_m^2}{2}$$

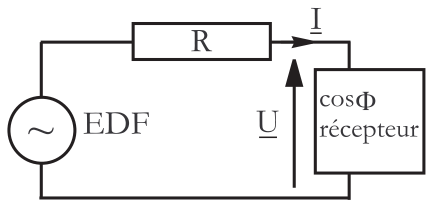
d'où : $\boxed{I_{\text{eff}} = \frac{I_m}{\sqrt{2}}}$ et, de même : $\boxed{U_{\text{eff}} = \frac{U_m}{\sqrt{2}}}$

d'où, en **régime sinusoïdal** : $\boxed{< \mathcal{P} >= \frac{U_m I_m}{2}\cos\phi = U_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \cos\phi = RI_{\text{eff}}^2 = GU_{\text{eff}}^2}$

Rq : Les appareils de mesures (multimètres) indiquent la valeur efficace des grandeurs mesurées en position AC ou $\sim$. En position DC ou $=$, ils indiquent la valeur moyenne des grandeurs.
On distingue deux type de multimètres :
- les multimètres TRUE RMS ("à valeurs efficaces vraies") qui peuvent mesurer la valeur efficace de n'importe quel signal (sinusoïdal, carré, triangulaire, etc...)
- Les multimètres RMS qui, pour évaluer G_{eff}, se contentent de mesurer G_m et indiquent $\frac{G_m}{\sqrt{2}}$.
La mesure n'est alors correcte que pour les grandeurs sinusoïdales !!
Bien entendu, il y a une différence de prix ...

V.3 Importance du facteur de puissance

• Soit un réseau composé de :
- un générateur du réseau de distribution EDF
- une installation réceptrice d'un usager
- une ligne de transport de résistance R.



• La puissance moyenne reçue (et donc consommée) par l'usager vaut : $< \mathcal{P}_{\text{cons}} >= U_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \cos\phi$.

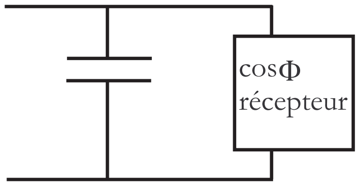
• La puissance moyenne dissipée dans la ligne vaut : $< \mathcal{P}_{\text{diss}} >= \frac{1}{2}RI_m^2 = RI_{\text{eff}}^2$.

• Le **coefficient de perte** est défini par $\boxed{\rho = \frac{< \mathcal{P}_{\text{diss}} >}{< \mathcal{P}_{\text{cons}} >} = \frac{RI_{\text{eff}}}{U_{\text{eff}}\cos\phi} = \frac{R < \mathcal{P}_{\text{cons}} >}{U_{\text{eff}}^2 \cos^2\phi}}$.

Pour réduire ρ il faut :
- diminuer R
- augmenter U_{eff} (on utilise des lignes à hautes tensions)
- augmenter $\cos\phi$ (en France, la législation impose $\cos\phi > 0,9$ sous peine d'amende).

• Comment peut-on améliorer le facteur de puissance $\cos\phi$?
En général, l'admittance des installations réceptrices est de la forme $\underline{Y} = G + jB$, avec $B < 0$ à cause des bobines des moteurs.

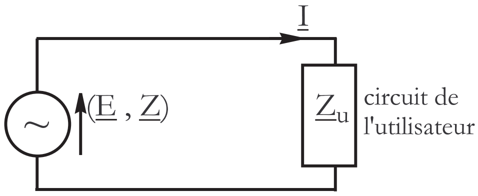
On place un condensateur en parallèle avec l'installation à "améliorer" :
L'admittance totale devient : $\underline{Y} = G + j(B + C\omega)$,
en prenant $C = -\dfrac{B}{\omega}$, on obtient $\underline{Y}$ réel, doù : $\cos\phi = 1$.



$\longrightarrow$ On dit qu'on a *relevé* le facteur de puissance.

V.4 Transfert de puissance et adaptation d'impédance

• On considère un montage constitué d'un générateur de *f.é.m.* d'amplitude complexe $\underline{E}$ et d'impédance interne complexe $\underline{Z}$ branché sur une impédance d'utilisation $\underline{Z}_u$.
Position du problème : On cherche la valeur de $\underline{Z}_u$ pour laquelle la puissance moyenne reçue par $\underline{Z}_u$ est maximale. On dit alors que la charge $\underline{Z}_u$ est *adaptée*.



• Loi de Pouillet : $\underline{I} = \dfrac{\underline{E}}{\underline{Z} + \underline{Z}_u}$ avec $\underline{Z} = R + jX$ et $\underline{Z}_u = R_u + jX_u$.

Or , la puissance moyenne reçue par $\underline{Z}_u$ vaut : $<\mathcal{P}>= \dfrac{1}{2}R_u|\underline{I}|^2$ d'où :

$$<\mathcal{P}>= \frac{1}{2}R_u\frac{E^2}{(R+R_u)^2+(X+X_u)^2}.$$

Pour R, R_u et X fixés, $<\mathcal{P}>$ est maximum pour $X + X_u = 0$, soit pour $\underline{X = -X_u}$.
Dans ce cas :

$$<\mathcal{P}>= \frac{E^2}{2}\frac{R_u}{(R+R_u)^2} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}<\mathcal{P}>}{\mathrm{d}R_u} = \frac{E^2}{2}\frac{1}{(R+R_u)^4}[(R+R_u)^2-2R_u(R+R_u)] = \frac{E^2}{2}\frac{R-R_u}{(R+R_u)^3}.$$

R_u	0		R		∞
$\dfrac{\mathrm{d}<\mathcal{P}>}{\mathrm{d}R_u}$		+	0	$-$	
$<\mathcal{P}>$		$\nearrow$	$\dfrac{E^2}{8R}$	$\searrow$	

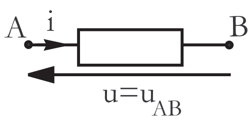
La puissance maximale reçue par $\underline{Z}_u$ est obtenue pour :

$$X_u = -X \quad \text{et} \quad R_u = R$$

C'est à dire pour : $\boxed{\underline{Z}_u = \underline{Z}^*}$
avec $\underline{Z}^*$ le complexe conjugué de $\underline{Z}$.

$\rightarrow$ lorsque $\underline{Z}_u = \underline{Z}^*$, on dit qu'il y a **adaptation d'impédance**.

VI Puissance Complexe (Hors Programme)



$i = I_m \cos(\omega t + \varphi_i)$
$u = U_m \cos(\omega t + \varphi_u)$

◇ **Définition :** La puissance complexe reçue par le dipôle est définie par :

$$\underline{\mathcal{P}} = \frac{1}{2}\underline{u}.\underline{i}^*$$ [a]

a. *Attention*, ce n'est pas $\underline{u}.\underline{i}$! ! !

On a alors :

$$\underline{\mathcal{P}} = \frac{1}{2}U_m e^{j\varphi_u} I_m e^{-j\varphi_i} = \frac{U_m I_m}{2} e^{j\phi} = \underbrace{\frac{U_m I_m}{2}\cos\phi}_{\text{puiss. active=p.moy. reçue=}<\mathcal{P}>} + j \underbrace{\frac{U_m I_m}{2}\sin\phi}_{\text{puissance réactive } \mathcal{P}_r}$$

$\longrightarrow$

$$\boxed{\mathcal{R}e(\underline{\mathcal{P}}) = < \mathcal{P} >}$$

- **Exemples :**

Résistance R :

$$\underline{\mathcal{P}} = \frac{1}{2}\underline{u}.\underline{i}^* = \frac{1}{2}R\underline{i}.\underline{i}^* = \frac{1}{2}R|\underline{i}|^2 = \frac{1}{2}RI_m^2 \Rightarrow \boxed{< \mathcal{P}_R >= \frac{1}{2}RI_m^2} \quad \text{et} \quad \mathcal{P}_{r,R} = 0.$$

Bobine L :

$$\underline{\mathcal{P}} = \frac{1}{2}\underline{u}.\underline{i}^* = \frac{1}{2}jL\omega\underline{i}.\underline{i}^* = j\frac{L\omega}{2}|\underline{i}|^2 = j\frac{L\omega}{2}I_m^2 \Rightarrow \boxed{< \mathcal{P}_L >= 0} \quad \text{et} \quad \mathcal{P}_{r,L} = \frac{L\omega}{2}I_m^2.$$

Condensateur C :

$$\underline{\mathcal{P}} = \frac{1}{2}\underline{u}.\underline{i}^* = \frac{1}{j2C\omega}\underline{i}.\underline{i}^* = -j\frac{1}{2C\omega}R|\underline{i}|^2 = -j\frac{1}{2C\omega}I_m^2 \Rightarrow \boxed{< \mathcal{P}_C >= 0} \quad \text{et} \quad \mathcal{P}_{r,C} = -\frac{1}{2C\omega}I_m^2.$$