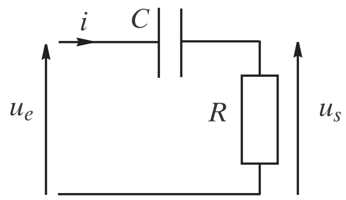
II Filtre d'ordre 1

II.2 Filtres passe-haut d'ordre 1

a Exemple et étude asymptotique :



• À Basses Fréquences (ABF) le condensateur est un coupe-circuit, donc $i \cong 0$ et $u_s = u_R = 0$.
• À Hautes Fréquences (AHF), le condensateur se comporte comme un fil, donc $u_s \cong u_e$.
$\longrightarrow$ Ce circuit est bien un **filtre passe-haut**.

b Fonction de transfert :

• $\underline{H}(j\omega) = \dfrac{\underline{U}_s}{\underline{U}_e} = \dfrac{R}{R + \dfrac{1}{jC\omega}}$ (par application du Diviseur de tension) $\longrightarrow$ $\underline{H}(j\omega) = \dfrac{jRC\omega}{1 + jRC\omega}$

• On peut introduire le temps caractéristique $\tau \equiv RC$, et écrire : $\underline{H}(j\omega) = \dfrac{j\tau\omega}{1 + j\tau\omega}$

Ou mieux, poser la **pulsation propre** $\boxed{\omega_0 \equiv \dfrac{1}{\tau} = \dfrac{1}{RC}}$ et, la **fréquence réduite** $\boxed{x \equiv \dfrac{f}{f_0} = \dfrac{\omega}{\omega_0}}$.

Alors : $\boxed{\underline{H}(j\omega) = \dfrac{jx}{1 + jx}}$

c Diagramme de Bode :

α) Réponse en gain :

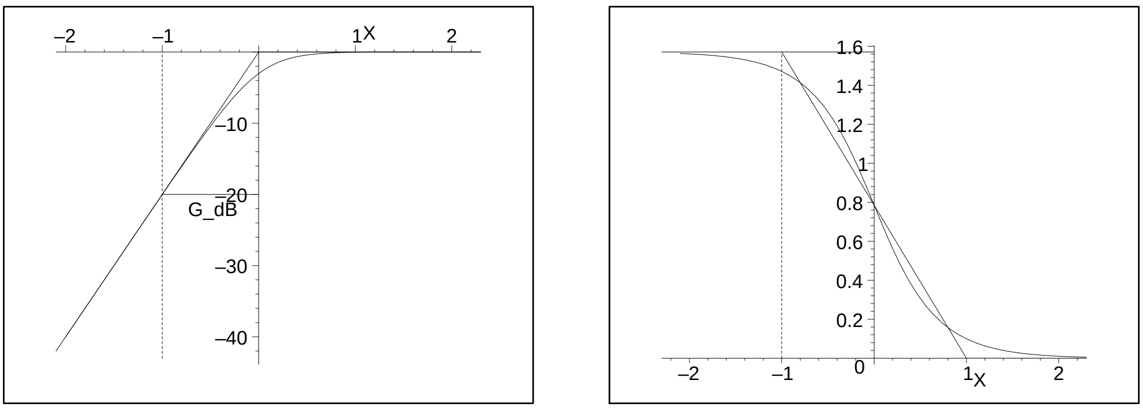
$\hookrightarrow$ Comportement asymptotique en BF et en HF, sachant que $G_{dB} \equiv 20 \log |\underline{H}| = 20 \log \left(\dfrac{x}{\sqrt{1 + x^2}} \right)$:

∘ pour $x \ll 1$ $(\omega \ll \omega_0)$: $G_{dB} \ \rightarrow \ G_{dB}(\text{ABF}) = 20 \log(x)$
$\Rightarrow$ asymptote à $+20\ dB/$déc passant par $(0, 0)$.
∘ pour $x = 1$ $(\omega = \omega_0)$: $G_{dB} = -20 \log(\sqrt{2}) = -3\ dB$.
∘ pour $x \gg 1$ $(\omega \gg \omega_0)$: $G_{dB} \ \rightarrow \ G_{dB}(\text{AHF}) = 0$
$\Rightarrow$ asymptote horizontale passant par $(0, 0)$.

CI : Les pulsations supérieures à la pulsation ω_0 $(x > 1)$ sont transmises avec une atténuation inférieure à $3\ dB$, alors que les pulsations inférieures à ω_0 $(x < 1)$ sont atténuées de $20\ dB/$déc.
$\longrightarrow$ Ce filtre est un passe-haut d'ordre 1, de pulsation de coupure ω_0 et dont la bande passante à $-3\ dB$ est $[\omega_0, +\infty[$.

b) Réponse en phase :

• $\phi = \varphi_s - \varphi_e = \arg(\underline{H}) = \arg(jx) - \arg(1 + jx) = \dfrac{\pi}{2} - \arctan(x)$
∘ pour $x \ll 1$ $(\omega \ll \omega_0)$: $\phi \ \rightarrow \ \phi(BF) = \dfrac{\pi}{2} \ \Rightarrow$ asymptote à $\dfrac{\pi}{2}$
∘ pour $x = 1$ $(\omega = \omega_0)$: $\phi = \dfrac{\pi}{4}$
∘ pour $x \gg 1$ $(\omega \gg \omega_0)$: $\phi \ \rightarrow \ \phi(HF) = 0 \ \Rightarrow$ asymptote horizontale.



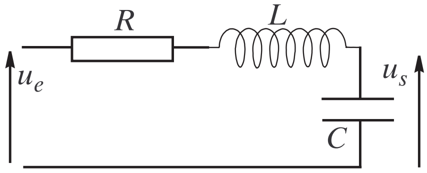
Réponse en gain et en phase avec diagrammes asymptotiques pour un passe-haut d'ordre 1

III Filtres d'ordre 2

III.2 Filtres passe-bas d'ordre 2

a Exemple et étude asymptotique :

• À Basses Fréquences (BF) la bobine est un fil et le condensateur est un coupe-circuit, donc $i \cong 0$ et $u_s = u_e$.
• À Hautes Fréquences (HF), la bobine est un fil (donc $i \cong 0$) et le condensateur se comporte comme un fil, donc $u_s \cong 0$.
$\longrightarrow$ Ce circuit est bien un **filtre passe-bas**.



b Fonction de transfert :

• $\underline{H}(j\omega) = \dfrac{\underline{U}_s}{\underline{U}_e} = \dfrac{\dfrac{1}{jC\omega}}{R + jL\omega + \dfrac{1}{jC\omega}}$ (Diviseur de tension) $\rightarrow \underline{H}(j\omega) = \dfrac{1}{1 + jRC\omega + LC\,(j\omega)^2}$.

• On peut introduire la **pulsation propre** ($\omega_0 \equiv \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$) et le **facteur de qualité** $\left(Q = \dfrac{L\omega_0}{R} = \dfrac{1}{RC\omega_0}\right)$ d'un circuit (RLC) série ; alors : $\boxed{\underline{H}(j\omega) = \dfrac{1}{1 + j\dfrac{x}{Q} + (jx)^2}}$

c Diagramme de Bode :

α) Réponse en gain : • Comportement asymptotique en BF et en HF, sachant que

$$G_{dB} \equiv 20\log|\underline{H}| = 20\log\left(\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)^2 + \dfrac{x^2}{Q^2}}}\right) = -10\log\left((1-x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2}\right)$$

○ pour $x \ll 1$ $(\omega \ll \omega_0)$: $G_{dB} \;\rightarrow\; G_{dB}(\mathsf{ABF}) = -10\log(1) = 0$
$\Rightarrow$ asymptote horizontale à 0 dB.
○ pour $x = 1$ $(\omega = \omega_0)$: $G_{dB} = 20\log(Q)$.
○ pour $x \gg 1$ $(\omega \gg \omega_0)$: $G_{dB} \;\rightarrow\; G_{dB}(\mathsf{AHF}) = -40\log(x)$
$\Rightarrow$ asymptote à -40 dB/déc.

CI : Les pulsations très supérieures à la pulsation ω_0 $(x > 1)$ sont atténuées de -40 dB/déc, alors que les pulsations très inférieures à ω_0 $(x < 1)$ sont transmises avec une atténuation inférieure à -3 dB.

• Par contre, le facteur de qualité influe sur le comportement de la courbe au voisinage de $\omega = \omega_0$; l'écart entre la courbe et le diagramme asymptotique pouvant devenir très important pour les grandes valeurs de Q. $\longrightarrow$ Étudions cette zone « sensible »...

○ Le gain présente un *maximum* lorsque $f(x) = (1-x^2)^2 + \dfrac{x^2}{Q^2}$ passe par un minimum.

La dérivée de cette fonction $f(x)$ est : $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = 2x\left(2x^2 - 2 + \dfrac{1}{Q^2}\right)$. Cette dérivée s'annule pour :
- $x = 0$, ce qui correspond au régime continu et n'a ici aucun intérêt (puisque nous étudions un régime sinusoïdal),
- $x_r = \sqrt{1 - \dfrac{1}{2Q^2}} = \dfrac{\omega_r}{\omega_0}$, ce qui correspond à la pulsation de résonance en tension aux bornes du condensateur (improprement parfois appelée « surtension » aux bornes de C) :

$\boxed{\omega_r = \omega_0\sqrt{1 - \dfrac{1}{2Q^2}}}$ Cette résonance ($G_{dB} > 0 \;\Leftrightarrow\; H = G > 1$) en tension aux bornes de la capacité n'existe que pour $\boxed{Q > \dfrac{1}{\sqrt{2}}}$ (car $x_r^2 > 0$!).

∘ Deux cas sont donc à envisager :

(1) $Q > \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ $\longrightarrow$ le gain en décibels présente un maximum positif pour une pulsation de résonance (en tension) ω_r légèrement inférieure à la pulsation ω_0 (avec $\omega_r \to \omega_0$ lorsque $Q \nearrow$)

(2) $Q < \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ $\longrightarrow$ la courbe de gain ne présente pas de maximum : elle est toujours « en dessous » de ses asymptotes.

• Le cas **(1)** (existence d'un maximum de G_{dB}) n'est pas du tout intéressant si l'on désire réaliser un filtre car le gain d'un filtre ne doit avoir que de faibles variations sur sa bande passante ! !

> Ce circuit sera utilisé en tant que filtre passe-bas du 2^{nd} ordre lorsque $Q \cong \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.
> Alors, il s'agit bien d'un filtre passe-bas, de pulsation de coupure ω_0 (car $G_{dB}(\omega_0) - G_{dB}(max) = -3\ dB$) et dont la bande passante à $-3\ dB$ est : $[0; \omega_0]$.

α) Réponse en phase :

• Comme $\underline{H}(j\omega) = \dfrac{1}{1 + jRC\omega + LC\,(j\omega)^2} = \dfrac{1}{1 - x^2 + j\,\dfrac{1}{Q}} = \dfrac{1}{\underline{D}} = \dfrac{\underline{D}^*}{|\underline{D}|^2} = \dfrac{1 - x^2 - j\,\dfrac{1}{Q}}{D^2}$:

• $\phi = \varphi_s - \varphi_e = \mathsf{arg}\,(\underline{H}) = \mathsf{arg}\left(1 - x^2 - j\,\dfrac{x}{Q}\right)$ et comme $\sin\phi = \dfrac{-\dfrac{x}{Q}}{D} < 0$, donc : $\boxed{-\pi < \phi < 0}$

Comme la fonction arctan est définie à π près, l'expression littérale de ϕ dépend du signe de son cosinus :

- Si $(1 - x^2) > 0$ (soit $x < 1$), alors $\cos\phi > 0$ (soit $-\dfrac{\pi}{2} < \phi < 0$) et donc : $\phi = -\arctan\left(\dfrac{x}{Q\,(1 - x^2)}\right)$

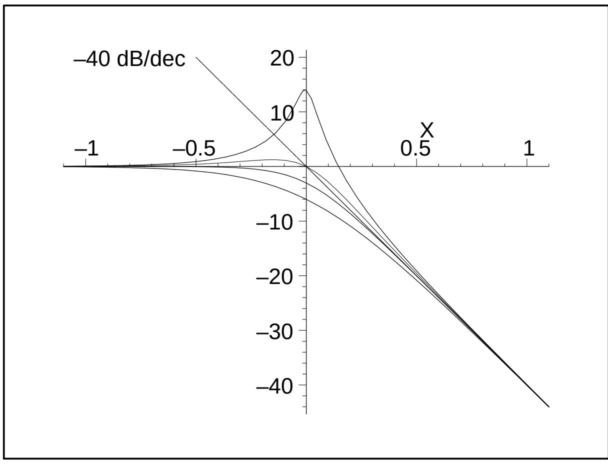
$\Rightarrow$ Donc, si $x \ll 1$, la courbe admet une asymptote horizontale : $\boxed{\phi(\mathsf{ABF}) = 0}$

-Si $(1 - x^2) < 0$ (soit $x > 1$), alors $\cos\phi < 0$ (soit $-\pi < \phi < -\dfrac{\pi}{2}$)

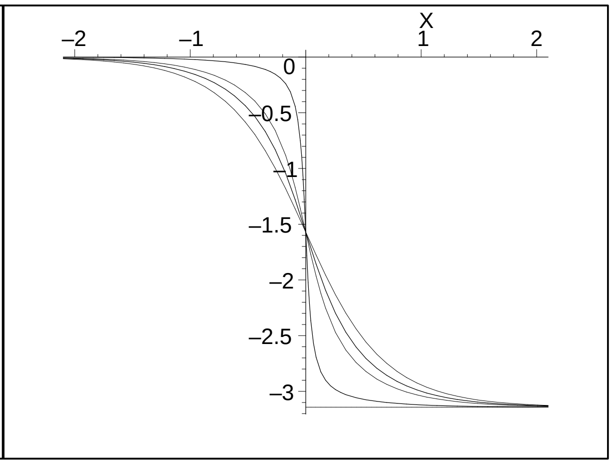
et donc : $\phi = -\pi - \arctan\left(\dfrac{x}{Q\,(1 - x^2)}\right)$

$\Rightarrow$ Donc, si $x \gg 1$, la courbe admet une asymptote horizontale : $\boxed{\phi(\mathsf{AHF}) = -\pi}$

• La « rotation » de phase s'effectue pour l'essentiel autour de $x = 1$ ($\omega = \omega_0$) ; elle est d'autant plus rapide que Q, le facteur de qualité du circuit (RLC) série, est élevé.



III.2.b.α – Courbe de réponse en gain et diagramme asymptotique pour un filtre passe-bas d'ordre 2 $\left(Q = 5,\ 1,\ \dfrac{1}{\sqrt{2}},\ \dfrac{1}{2}\right)$



III.2.b.β – Courbe de réponse en phase et diagramme asymptotique pour un filtre passe-bas d'ordre 2 $\left(Q = 5,\ 1,\ \dfrac{1}{\sqrt{2}},\ \dfrac{1}{2}\right)$