

Leçon E6 – Méthodes

Rq : À priori les constantes $\alpha, \beta, \gamma, a, b$ et c sont des complexes ; de même pour \underline{H}_0 .

■ Quelle est la fonction de transfert canonique d'un filtre d'ordre 1 ?

◇ **Définition** : La fonction de transfert d'un filtre d'ordre 1 peut se mettre sous l'une des deux **formes canoniques** suivantes :

Filtre Passe-Bas	Filtre Passe-Haut	avec	$\left\{ \begin{array}{l} x = \frac{\omega}{\omega_0} = \frac{f}{f_0} \\ \omega \text{ la pulsation propre} \\ f \text{ la fréquence propre} \end{array} \right.$
↓	↓		
$\underline{H}(jx) = \frac{\underline{H}_0}{1 + jx}$	$\underline{H}(jx) = \frac{\underline{H}_0 \cdot jx}{1 + jx}$		

■ Comment reconnaître la nature d'un filtre d'ordre 1 ?

□ **Méthode 1.**— Il faut écrire la **fonction de transfert « spécifique »** (au filtre qu'on est en train d'étudier) sous la forme :

$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{N}(j\omega)}{a + b \cdot j\omega}$	si $\underline{N}(j\omega) = \alpha$: il s'agit d'un filtre passe-bas
	si $\underline{N}(j\omega) = \beta \cdot j\omega$: il s'agit d'un filtre passe-haut

■ Comment exprimer la fréquence propre d'un filtre d'ordre 1 ?

□ **Méthode 2.**— Il faut comparer la fonction de transfert « spécifique » \underline{H} à la forme canonique à laquelle elle appartient en écrivant $\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{N}(j\omega)}{a + b \cdot j\omega}$ sous la forme :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{N}'(j\omega)}{1 + \frac{b}{a} j\omega} \longleftrightarrow \underline{H}(jx) = \frac{\underline{N}_0(jx)}{1 + jx} \quad \text{avec } \underline{N}_0(jx) = \begin{cases} \underline{H}_0 \\ \text{ou} \\ \underline{H}_0 \cdot jx \end{cases}$$

Alors

{	1	↔	1	→	$x \equiv \frac{\omega}{\omega_0} = \frac{b}{a} \omega$	↔	$\omega_0 = \frac{a}{b}$
{	$\frac{b}{a} j\omega$	↔	jx				
{	$\underline{N}'(j\omega) = \frac{\underline{N}}{a}$	↔	$\underline{N}_0(jx)$	→	$\underline{N}' = \underline{N}_0$	⇒	\underline{H}_0

■ Comment reconnaître la nature d'un filtre d'ordre 2 ?

□ **Méthode 3.**— Il faut écrire la fonction de transfert sous la forme :

$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{N}(j\omega)}{a + b \cdot j\omega + c \cdot (j\omega)^2}$	si $\underline{N}(j\omega) = \alpha$: filtre passe-bas
	si $\underline{N}(j\omega) = \beta \cdot j\omega$: filtre passe-bande
	si $\underline{N}(j\omega) = \gamma \cdot (j\omega)^2$: filtre passe-haut
	si $\underline{N}(j\omega) = \alpha + \gamma \cdot (j\omega)^2$: coupe-bande

■ Quelle est la fonction de transfert canonique d'un filtre d'ordre 2 ?

◇ **Définition** : La fonction de transfert d'un filtre d'ordre 2 classique peut se mettre sous l'une des quatre **formes canoniques** suivantes :

Passe-Bas $\underline{H}(jx) = \frac{\underline{H}_0}{1 + \frac{jx}{Q} + (jx)^2}$	$\underline{H}(jx) = \frac{\underline{H}_0 \cdot \frac{jx}{Q}}{1 + \frac{jx}{Q} + (jx)^2}$	Passe-Bande
Passe-Haut $\underline{H}(jx) = \frac{\underline{H}_0 \cdot (jx)^2}{1 + \frac{jx}{Q} + (jx)^2}$	$\underline{H}(jx) = \frac{\underline{H}_0 \cdot (1 + (jx)^2)}{1 + \frac{jx}{Q} + (jx)^2}$	Coupe-Bande

■ Comment exprimer la fréquence propre d'un filtre d'ordre 2 ?

□ **Méthode 4.**— Il faut comparer la fonction de transfert « spécifique » \underline{H} à la forme canonique à laquelle elle appartient en écrivant $\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{N}(j\omega)}{a + b \cdot j\omega + c(j\omega)^2}$ sous la forme :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{N}'(j\omega)}{1 + \frac{b}{a}j\omega + \frac{c}{a}(j\omega)^2} \longleftrightarrow \underline{H}(jx) = \frac{\underline{N}_0(jx)}{1 + \frac{jx}{Q} + (jx)^2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1 \longleftrightarrow 1 \\ \frac{c}{a}(j\omega)^2 \longleftrightarrow (jx)^2 \rightarrow x^2 \equiv \frac{\omega^2}{\omega_0^2} = \frac{c}{a}\omega^2 \Leftrightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{a}{c}} \\ \frac{b}{a}j\omega \longleftrightarrow \frac{jx}{Q} \rightarrow \frac{x}{Q} \equiv \frac{b}{a}\omega \Leftrightarrow Q = \frac{a}{b\omega_0} = \frac{c\omega_0}{b} \\ \underline{N}'(j\omega) = \frac{\underline{N}}{a} \longleftrightarrow \underline{N}_0(jx) \rightarrow \underline{N}' = \underline{N}_0 \Rightarrow \underline{H}_0 \end{cases}$$

■ Quelle est la forme la plus pratique de \underline{H} pour un filtre passe-bande d'ordre 2 ?

□ **Méthode 5.**— Pour un filtre passe-bande d'ordre 2, la fonction de transfert canonique peut s'écrire sous une seconde forme, plus pratique pour exprimer H , G_{dB} et φ :

$$\underline{H}(jx) = \frac{\underline{H}_0 \cdot \frac{jx}{Q}}{1 + \frac{jx}{Q} + (jx)^2} \xrightarrow[\text{par } \frac{jx}{Q}]{\text{en factorisant}} \underline{H} = \frac{\underline{H}_0}{1 + jQ \left(x - \frac{1}{x} \right)}$$

$$H = |\underline{H}| = \frac{|\underline{H}_0|}{\sqrt{1 + Q^2 \left(x - \frac{1}{x} \right)^2}}$$

$$\varphi = \arg \underline{H} = \arg \underline{H}_0 - \arctan \left[Q \left(x - \frac{1}{x} \right) \right]$$

$$G_{dB} = 20 \log \underline{H} = 20 \log |\underline{H}_0| - 10 \log \left[1 + Q^2 \left(x - \frac{1}{x} \right)^2 \right]$$