

EM3 – DIPÔLE ÉLECTROSTATIQUE

II Actions exercées par un dipôle

II.1 Potentiel créé par un dipôle

• Le potentiel électrostatique est défini à une constante près.

Comme la distribution $\mathcal{D} \{+q, -q\}$ est localisée, il n'y a aucune charge à l'infini et on peut poser : $V_{\text{dipôle}}(\infty) = 0$.

Si on choisit \overrightarrow{NP} colinéaire à $\overrightarrow{e_z}$, les coordonnées adaptées pour repérer M par rapport au dipôle sont les coordonnées sphériques (r, θ, φ) .

• **Théorème de superposition :**

$$V(M) = V_{\text{dipôle}}(M) = V_P(M) + V_N(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{PM} - \frac{1}{NM} \right)$$

$$\begin{cases} PM^2 = \overrightarrow{PM}^2 = (\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OM})^2 = PO^2 + OM^2 - 2\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OM} = \frac{a^2}{4} + r^2 - 2\frac{a}{2}r \cos\theta \\ NM^2 = \overrightarrow{NM}^2 = (\overrightarrow{NO} + \overrightarrow{OM})^2 = NO^2 + OM^2 - 2\overrightarrow{ON} \cdot \overrightarrow{OM} = \frac{a^2}{4} + r^2 + 2\frac{a}{2}r \cos\theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} PM = \sqrt{PM^2} = r \left(1 - \frac{a}{r} \cos\theta + \frac{a^2}{4r^2} \right)^{\frac{1}{2}} \\ NM = \sqrt{NM^2} = r \left(1 + \frac{a}{r} \cos\theta + \frac{a^2}{4r^2} \right)^{\frac{1}{2}} \end{cases}$$

$$\rightarrow \text{Soit : } V(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \left[\left(1 - \frac{a}{r} \cos\theta + \frac{a^2}{4r^2} \right)^{-\frac{1}{2}} - \left(1 + \frac{a}{r} \cos\theta + \frac{a^2}{4r^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \right]$$

Or, travailler dans l'approximation dipolaire revient à considérer $a \ll r$, donc autorise un **DL**₁ (**D**éveloppement **L**imité à l'ordre 1) en $\frac{a}{r}$.

Rappel : $(1+x)^\alpha \cong 1 + \alpha x$ à l'ordre 1 en x . Donc :

$$\rightarrow V(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \left[\left\{ 1 - \frac{1}{2} \left(-\frac{a}{r} \cos\theta + o\left(\frac{1}{r}\right) \right) \right\} - \left\{ 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{a}{r} \cos\theta + o\left(\frac{1}{r}\right) \right) \right\} \right]$$

$$V(M) \cong \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \left[2\frac{a}{2r} \cos\theta \right] \rightarrow V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qa \cos\theta}{r^2}$$

Or : $qa \cos\theta = p \cos\theta = \overrightarrow{p} \cdot \overrightarrow{e_r} = \overrightarrow{p} \cdot \frac{\overrightarrow{OM}}{OM}$. D'où :

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \cos\theta}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\overrightarrow{p} \cdot \overrightarrow{e_r}}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\overrightarrow{p} \cdot \overrightarrow{OM}}{OM^3}$$

Rque : La distribution $\mathcal{D} \{P, N\}$ est invariante par rotation autour de Oz . Donc, le potentiel en M ne doit pas dépendre de φ . Et l'expression que l'on vient d'établir permet bien de vérifier :

$$V(M) = V(r, \theta, \varphi) = V(r, \theta)$$

II.2 Champ du dipôle

- **Invariance** : Symétrie de révolution d'axe Oz (cf. ci-dessus) $\rightarrow \vec{E}(M) = \vec{E}(r, \theta)$ (\star).
- **Symétrie** : $(M, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta) = (\Pi)$ est un plan de symétrie du dipôle source du champ \vec{E} en M , donc $\vec{E}(M) \subset (\Pi)$ ($\star\star$).

$$(\star) \text{ et } (\star\star) \rightarrow \boxed{\vec{E}(M) = E_r(r, \theta) \vec{e}_r + E_\theta(r, \theta) \vec{e}_\theta}$$

- Comme, par définition du potentiel électrostatique, $\vec{E}(M) \equiv -\overrightarrow{\text{grad}}_M V$, on en déduit :

$$\begin{array}{l} E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{2p \cos \theta}{r^3} \\ E_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{p \sin \theta}{r^3} \end{array} \quad \text{et} \quad E_\varphi = -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \varphi} = 0$$

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{2p \cos \theta \vec{e}_r + p \sin \theta \vec{e}_\theta}{r^3}$$

Comme $\vec{p} = p \cos \theta \vec{e}_r - p \sin \theta \vec{e}_\theta$, on peut remarquer que :

$$3(\vec{p} \cdot \vec{e}_r) \vec{e}_r - \vec{p} = 3p \cos \theta \vec{e}_r - (p \cos \theta \vec{e}_r - p \sin \theta \vec{e}_\theta) = 2p \cos \theta \vec{e}_r + p \sin \theta \vec{e}_\theta$$

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{3(\vec{p} \cdot \vec{e}_r) \vec{e}_r - \vec{p}}{r^3} = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{3(\vec{p} \cdot \overrightarrow{OM}) \overrightarrow{OM} - OM^2 \vec{p}}{OM^5}$$

Commentaire : Cette toute dernière expression de \vec{E} ne fait intervenir que le moment dipolaire et le vecteur position. Elle est donc indépendante du système de coordonnées choisi ; aussi, on l'appelle « l'expression intrinsèque » du champ électrostatique créé par le dipôle.

- **Rques** :

(1) Pour une charge ponctuelle q placée en O , le champ \vec{E} décroît en $\frac{1}{r^2}$

alors que pour un dipôle, la décroissance est beaucoup plus rapide puisqu'elle est en $\frac{1}{r^3}$.

(2) Le calcul à partir du potentiel électrostatique est possible en utilisant une propriété de l'opérateur « gradient » :

$$\overrightarrow{\text{grad}}(ab) = a \overrightarrow{\text{grad}} b + b \overrightarrow{\text{grad}} a$$

$$\text{Ainsi, comme} \begin{cases} \overrightarrow{\text{grad}}_M(\vec{p} \cdot \overrightarrow{OM}) = \vec{p} \\ \overrightarrow{\text{grad}}_M \frac{1}{OM^3} = -3 \frac{\overrightarrow{OM}}{OM^5} \end{cases}$$

$$\vec{E}(M) \equiv -\overrightarrow{\text{grad}}_M V = -\frac{1}{4\pi \epsilon_0} \overrightarrow{\text{grad}} \left(\frac{\vec{p} \cdot \overrightarrow{OM}}{OM^3} \right) = -\frac{1}{4\pi \epsilon_0} \left(\frac{\vec{p}}{OM^3} - 3(\vec{p} \cdot \overrightarrow{OM}) \frac{\overrightarrow{OM}}{OM^5} \right) \text{ soit :}$$

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{3(\vec{p} \cdot \overrightarrow{OM}) \overrightarrow{OM} - OM^2 \vec{p}}{OM^5}$$

III Approximation dipolaire - Intérêt du modèle dipolaire

III.1 Approximation dipolaire appliquée à une distribution \mathcal{D} quelconque

• Soit $\mathcal{D} = \{A_i; q_i\}$ une distribution de charges ponctuelles quelconque.

D'après le principe de superposition, \mathcal{D} crée en M le potentiel électrostatique : $V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{r_i}$.

On pose $r \equiv OM$, $a_i \equiv OA_i$ et $r_i \equiv A_iM$.

Comme $\overrightarrow{A_iM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA_i}$, on a :

$$r_i^2 = OM^2 + OA_i^2 - 2\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OA_i} = r^2 + a_i^2 - 2r \vec{e}_r \cdot \overrightarrow{OA_i}$$

Soit : $r_i = r \left(1 - \frac{2\vec{e}_r \cdot \overrightarrow{OA_i}}{r} + \frac{a_i^2}{r^2} \right)^{\frac{1}{2}}$. Et donc :

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{r} \left(1 - \frac{2\vec{e}_r \cdot \overrightarrow{OA_i}}{r} + \frac{a_i^2}{r^2} \right)^{-\frac{1}{2}}$$

Ce qui donne, à grande distance de la distribution (ie pour $a_i \gg r$), au premier ordre en $\frac{a_i}{r}$:

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sum_i q_i}{r} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{e}_r \cdot (\sum_i q_i \overrightarrow{OA_i})}{r^2} + \frac{k}{r^3} \dots$$

• Trois cas se présentent :

Cas (a) $\sum_i q_i = Q \neq 0$ → on peut alors choisir O tel que $\sum_i q_i \overrightarrow{OA_i} = \vec{0}$.

O est alors le barycentre des charges et $V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r} + \frac{k}{r^3}$.

→ À grande distance de la distribution, \mathcal{D} se comporte comme une charge ponctuelle Q placée en O .

Exemple : un ion.

Cas (b) $\sum_i q_i = Q = 0$ et $\sum_i q_i \overrightarrow{OA_i} \neq \vec{0}$

Alors il y a nécessairement autant de charges positives (Q_0) que de charges négatives ($-Q_0$) :

$$\sum_i q_i = Q = Q_0 - Q_0 = \sum_{j/q_j>0} q_j + \sum_{k/q_k<0} q_k$$

→ On peut alors introduire P , le barycentre des charges positives Q_0 , et N , le barycentre des charges négatives $-Q_0$:

$$\overrightarrow{OP} = \frac{\sum_j q_j \overrightarrow{OA_j}}{Q_0} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{ON} = \frac{\sum_k q_k \overrightarrow{OA_k}}{-Q_0}$$

→ Alors : $V(M) = 0 + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{e}_r \cdot (\sum_j q_j \overrightarrow{OA_j} + \sum_k q_k \overrightarrow{OA_k})}{r^2} + \frac{k}{r^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{e}_r \cdot Q_0 (\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{ON})}{r^2} + \frac{k}{r^3}$

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_0 \overrightarrow{NP} \cdot \vec{e}_r}{r^2} + \frac{k}{r^3}$$

Le potentiel est pratiquement le même, à grande distance de \mathcal{D} , que celui d'un dipôle de moment :

$$\vec{p} = Q_0 \overrightarrow{NP} = \sum_i q_i \overrightarrow{OA_i}$$

qui est indépendant de l'origine O choisie.

Cas (c) $\sum_i q_i = Q = 0$ et $\sum_i q_i \overrightarrow{OA_i} = \overrightarrow{0}$ \rightarrow alors : $V(M) = \frac{k}{r^3} + \dots$

On ne se contente plus de l'approximation dipolaire : il faut tenir compte des termes multipolaires (issus de DL d'ordre supérieur à 1 en $\frac{a_i}{r}$).

III.2 Le moment dipolaire des molécules

a Moment dipolaire permanent : les molécules polaires ($N \neq P$)

Ex : HCl Dans la molécule de chlorure d'hydrogène, le barycentre N des charges négatives est déplacé du côté du chlore et ne coïncide pas avec le barycentre P des charges positives, déplacé du côté de l'hydrogène.

b Moment dipolaire induit ; polarisabilité : atomes, cristaux ioniques, molécules apolaires atomiques

Ex : molécule de gaz rare comme He : $\overrightarrow{p_0} = \overrightarrow{0}$.

$$\left. \begin{array}{l} \alpha \equiv \text{polarisabilité de la molécule } (\sim 10^{-30} m^3) \\ \overrightarrow{p} \text{ moment dipolaire induit (Non rigide donc)} \\ \epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} F \cdot m^{-1} \text{ permittivité du vide} \end{array} \right\} \longrightarrow \boxed{\overrightarrow{p}(t) = \alpha \epsilon_0 \overrightarrow{E}(t)} \text{ avec } \alpha > 0$$

Rq1 : Cette relation de linéarité entre la cause (\overrightarrow{E}) et l'effet (\overrightarrow{p}) n'est valable que pour des champs « pas trop » intenses.

Rq2 : De plus, pour une molécule déjà polaire : $\overrightarrow{p} = \overrightarrow{p_0} + \overrightarrow{p}(t)$.