M10 – SYSTÈME FORMÉ DE DEUX POINTS MATÉRIELS

« Nous disons que la terre attire les corps et la lune ; mais cette manière de penser est marquée d'enfance ; il nous semble que la terre tire sur une corde invisible. En réalité l'attraction est une force entre deux corps, qui dépend de l'un et de l'autre, et qui n'est pas plus dans l'un que dans l'autre. »

Alain (1868-1951) – *Préliminaires à la mythologie* (1932-33)

OBJECTIFS

• Dans les chapitres précédents, on s'est intéressé à l'étude d'un point matériel ou d'un système modélisé par un point matériel. Dans cette leçon, on ne considère plus un unique point matériel, mais un **ensemble de points matériels**.
• Dans un premier temps, il est nécessaire de définir, pour un système de points matériels, les notions qui ont été utilisées pour un seul point : la masse, la quantité de mouvement, le moment cinétique et l'énergie cinétique (➜ §**I**).
• Dans le cadre du programme, on se limitera au **cas de deux points matériels**. Le **problème à deux corps** est d'une importance théorique considérable puisque :
- en mécanique classique, toutes les forces connues sont des forces à deux corps ;
- de nombreux systèmes physiques peuvent être modélisés par des systèmes matériels à deux particules
- ce problème a la particularité de recevoir une solution générale complète par l'introduction du **référentiel barycentrique** et de la notion de **masse réduite** (➜ §**II**).
• Après avoir montré comment les **Théorèmes de Kœnig** pour le moment cinétique et l'énergie cinétique permettent d'interpréter le mouvement d'un système de deux points matériels (➜ §**III**), il faudra établir les lois dynamiques qui régissent la nature et la trajectoire du mouvement d'un tel système : théorèmes de la résultante cinétique ou **T.C.I.**, du moment cinétique (➜ §**IV**) et de l'énergie cinétique (➜ §**V**).
• Dans le **cas d'un système isolé de deux points matériel**, lorsque les forces d'interaction dérivent d'une énergie potentielle, la conservation de l'énergie mécanique associée aux lois de conservation de la quantité de mouvement et du moment cinétique permettra de déterminer les équations du mouvement (➜ §**VI**).

I Éléments cinétiques d'un système de deux points matériels

I.1 Système et barycentre

♢ **Définition :** Pour le système $\mathcal{S} = \{M_1, m_1\,;\, M_2, m_2\}$ étudié dans $\mathcal{R}$, on définit :

- la **masse** (totale) du système :

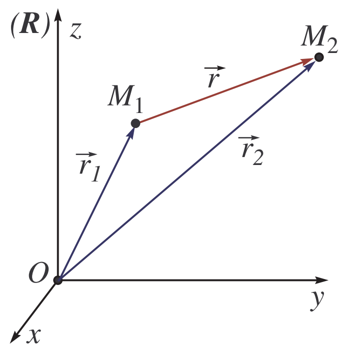
$$M = m_1 + m_2$$

- les **positions absolues** de M_1 et de M_2 dans le référentiel $\mathcal{R}$ d'étude :

$$\overrightarrow{r_1} = \overrightarrow{OM_1} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{r_2} = \overrightarrow{OM_2}$$

- la **position relative** de M_2 par rapport à M_1 :

$$\overrightarrow{r} = \overrightarrow{M_1M_2}$$



Rq : Les positions absolues de M_1 et M_2 dépendent du référentiel $\mathcal{R}$ (du point O fixe d'observation M_1 et M_2) alors que **la position relative est indépendante de** $\mathcal{R}$: elle ne dépend que de la distance r qui sépare M_2 de M_1 : $\overrightarrow{r} = r\,\overrightarrow{e}_{M_1 \to M_2}$.
On peut toutefois exprimer la position relative en fonction des positions absolues : puisque $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1}$, on a : $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r} = \overrightarrow{r_2} - \overrightarrow{r_1}$

◇ **Définition :** On appelle **centre d'inertie** / **centre de masse** / **barycentre** de $\mathcal{S}$, le point *géométrique* noté G tel que :

$$M\overrightarrow{OG} = m_1\overrightarrow{OM_1} + m_2\overrightarrow{M_2} \quad \Leftrightarrow \quad m_1\overrightarrow{GM_1} + m_2\overrightarrow{GM_2} = \overrightarrow{0}$$

Rq : La position absolue $\overrightarrow{r_G}$ du barycentre G dans $\mathcal{R}$ est donc :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{m_1\overrightarrow{OM_1} + m_2\overrightarrow{OM_2}}{m_1 + m_2} \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{r_G} = \frac{m_1\overrightarrow{r_1} + m_2\overrightarrow{r_2}}{m_1 + m_2}$$

◇ **Définition :**

• On appelle **positions barycentriques** de M_1 et de M_2 :

- la position de M_1 par rapport à G :

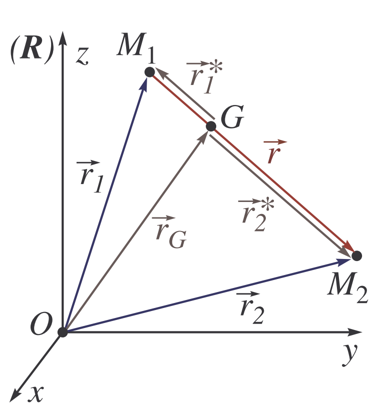
$$\overrightarrow{r_1}^* = \overrightarrow{GM_1}$$

- la position de M_2 par rapport à G :

$$\overrightarrow{r_2}^* = \overrightarrow{GM_2}$$

• Comme $\overrightarrow{GM_{1/2}} = \overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OM_{1/2}} = \overrightarrow{r_{1/2}} - \overrightarrow{r_G}$:

$$\overrightarrow{r_1}^* = \frac{-m_2}{m_1 + m_2}\overrightarrow{r} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{r_2}^* = \frac{m_1}{m_1 + m_2}\overrightarrow{r}$$



I.2 Quantité de mouvement (ou résultante cinétique) de $\mathcal{S}$

On définit la quantité de mouvement dans un référentiel $\mathcal{R}$ d'un système de deux points matériels la somme des quantités de mouvement dans ce référentiel $\mathcal{R}$ de chaque point matériel constituant le système $\mathcal{S}$: $\overrightarrow{p_{\mathcal{S}/\mathcal{R}}} \equiv \overrightarrow{p_{M_1/\mathcal{R}}} + \overrightarrow{p_{M_2/\mathcal{R}}} = m_1\overrightarrow{v_{M_1/\mathcal{R}}} + m_2\overrightarrow{v_{M_2/\mathcal{R}}}$

On a donc :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{p_{\mathcal{S}/\mathcal{R}}} &= m_1\overrightarrow{v_{M_1/\mathcal{R}}} + m_2\overrightarrow{v_{M_2/\mathcal{R}}} = m_1\left(\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM_1}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}} + m_2\left(\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM_2}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}} \\
&= \left(\frac{\mathrm{d}(m_1\overrightarrow{OM_1} + m_2\overrightarrow{OM_2})}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}} = \left(\frac{\mathrm{d}M.\overrightarrow{OG}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}} = M\,\overrightarrow{v_{G/\mathcal{R}}}
\end{aligned}$$

En posant $\begin{cases} \overrightarrow{v_1} = \overrightarrow{v_{M_1/\mathcal{R}}} \\ \overrightarrow{v_2} = \overrightarrow{v_{M_2/\mathcal{R}}} \end{cases}$ et $\begin{cases} \overrightarrow{p_1} = \overrightarrow{p_{M_1/\mathcal{R}}} \\ \overrightarrow{p_2} = \overrightarrow{p_{M_2/\mathcal{R}}} \end{cases}$ la définition de la quantité de mouvement de $\mathcal{S}$ conduit à une propriété importante :

Propriété : La **quantité de mouvement** $\overrightarrow{p_{\mathcal{S}/\mathcal{R}}} = \overrightarrow{p_1} + \overrightarrow{p_2}$ du système $\mathcal{S}$ dans le référentiel $\mathcal{R}$ est égale à la quantité de mouvement d'un point matériel *imaginaire* placé au centre d'inertie G affecté de la masse $M = m_1 + m_2$ du système :

$\overrightarrow{p_{\mathcal{S}/\mathcal{R}}} = M.\overrightarrow{v_{G/\mathcal{R}}}$ avec $\overrightarrow{v_{G/\mathcal{R}}}$ la vitesse du centre d'inertie dans le référentiel $\mathcal{R}$.

I.3 Moment cinétique de $\mathcal{S}$ en un point O dans un référentiel $\mathcal{R}$

Le moment cinétique d'un système de deux points matériels évalué en un point O est défini comme la somme des moments cinétiques de chaque point matériel par rapport au **même** point O : $\overrightarrow{L_{O/\mathcal{R}}}(\mathcal{S}) \equiv \overrightarrow{L_{O/\mathcal{R}}}(M_1) + \overrightarrow{L_{O/\mathcal{R}}}(M_2) = \overrightarrow{OM_1} \times m_1\overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{OM_2} \times m_2\overrightarrow{v_2}$

Rq : Il est important de comprendre que le moment cinétique d'un système de points $\mathcal{S}$ dépend du point O où on l'évalue. Si on introduit un second point A d'observation :

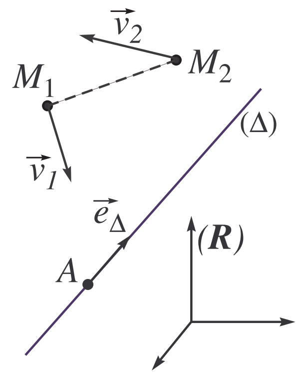
$$\begin{aligned}\overrightarrow{L_{O/\mathcal{R}}}(\mathcal{S}) &= \overrightarrow{OM_1}\times m_1\overrightarrow{v_1}+\overrightarrow{OM_2}\times m_2\overrightarrow{v_2}\\ &= (\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AM_1})\times m_1\overrightarrow{v_1}+(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AM_2})\times m_2\overrightarrow{v_2}\\ &= \overrightarrow{OA}\times\underbrace{(m_1\overrightarrow{v_1}+m_2\overrightarrow{v_2})}_{\overrightarrow{p_{\mathcal{S}/\mathcal{R}}}}+\underbrace{\overrightarrow{L_{A/\mathcal{R}}}(M_1)+\overrightarrow{L_{A/\mathcal{R}}}(M_2)}_{\overrightarrow{L_{A/\mathcal{R}}}(\mathcal{S})}\end{aligned}$$

▮Propriété : Composition des moments cinétiques : $\overrightarrow{L_{O/\mathcal{R}}}(\mathcal{S})=\overrightarrow{L_{A/\mathcal{R}}}(\mathcal{S})+\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{p_{\mathcal{S}/\mathcal{R}}}$

Rq1 : Il n'est pas utile de retenir cette relation — en revanche, il faut savoir l'établir rapidement.

Rq2 : Comme pour un point matériel, on défini le moment cinétique « scalaire », ou moment cinétique par rapport à une axe $(\Delta)=(A,\overrightarrow{e_\Delta})$:

$$L_\Delta(\mathcal{S})=\overrightarrow{L_{A/\mathcal{R}}}(\mathcal{S})\cdot\overrightarrow{e_\Delta}$$



I.4 Énergie cinétique

$$\mathcal{E}_{k/\mathcal{R}}(\mathcal{S})=\mathcal{E}_{k/\mathcal{R}}(M_1)+\mathcal{E}_{k/\mathcal{R}}(M_2)=\frac{1}{2}m_1v_1^2+\frac{1}{2}m_2v_2^2$$

II Référentiel barycentrique

II.1 Définitions

◇ **Définition :** Étant donné un référentiel $\mathcal{R}$, on appelle **référentiel barycentrique** (ou référentiel du **centre de masse**), noté $\mathcal{R}^*$, le référentiel :

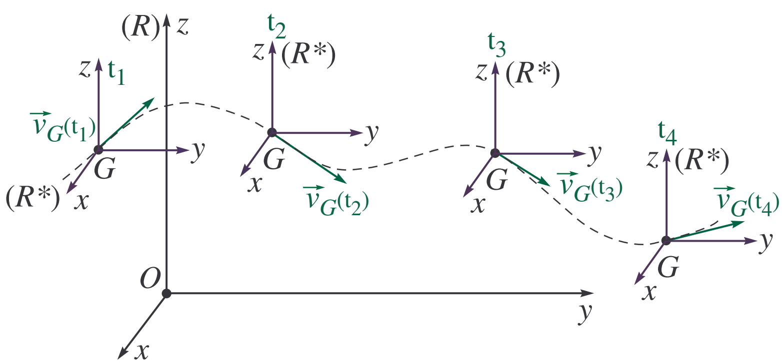
① **en translation** par rapport à $\mathcal{R}$

② dans lequel **la résultante cinétique du système est nulle** : $\overrightarrow{p}^*=\overrightarrow{p_{\mathcal{S}/\mathcal{R}^*}}\equiv\overrightarrow{0}$

Comme $\overrightarrow{p}^*=\overrightarrow{0}$ (②) et que $\overrightarrow{p}^*=M\overrightarrow{v_G}^*$ (par propriété de la résultante cinétique en notant $\overrightarrow{v_{G/\mathcal{R}^*}}=\overrightarrow{v_G}^*$), on en déduit que :

$$\overrightarrow{v_G}^*=\overrightarrow{0}\quad\forall t$$

Cl1 : Le barycentre G est fixe dans le référentiel barycentrique



Cl2 : Le référentiel barycentrique $\mathcal{R}^*$ est translation (①) à la vitesse d'entraînement $\overrightarrow{v_e}=\overrightarrow{v_{G/\mathcal{R}}}$ par rapport au référentiel absolu $\mathcal{R}$.

Rq : Attention : $\mathcal{R}^*$ n'est pas toujours galiléen. **Q :** à quelles conditions l'est-il ?

▮Propriété :

$$\left.\begin{array}{l}\textbf{Si } \mathcal{R} \text{ est galiléen}\\ \textbf{Si } \mathcal{R}^* \text{ est en translation rectiligne uniforme par rapport à } \mathcal{R}\end{array}\right\}\ \textbf{alors}\ \left\{\begin{array}{l}\mathcal{R}^* \text{ est galiléen}\\ \overrightarrow{v_e}=\overrightarrow{v_{G/\mathcal{R}}}=\overrightarrow{\mathrm{Cte}}\end{array}\right.$$

II.2 Mouvement d'entraînement de $\mathcal{R}^*$ par rapport à $\mathcal{R}$

• Comme $\mathcal{R}^*$ est en translation par rapport à $\mathcal{R}$ à la vitesse $\overrightarrow{v_{G/\mathcal{R}}}$, on a :

(1) $\forall M,\ \forall t$ $\boxed{\overrightarrow{v_e}(M) = \overrightarrow{v_{M^*/\mathcal{R}}} = \overrightarrow{v_{G/\mathcal{R}}}}$ et $\boxed{\overrightarrow{a_e}(M) = \overrightarrow{a_{M^*/\mathcal{R}}} = \overrightarrow{a_{G/\mathcal{R}}}}$
(car M^* et G appartiennent au solide géométrique $\mathcal{R}^*$ en translation p/r à $\mathcal{R}$)

(2) $\boxed{\overrightarrow{\Omega}_{\mathcal{R}^*/\mathcal{R}} = \overrightarrow{0}}$ $\Rightarrow$ $\forall M$ $\boxed{\overrightarrow{a_C}(M) = 2\overrightarrow{\Omega}_{\mathcal{R}^*/\mathcal{R}} \times \overrightarrow{v_{M^*/\mathcal{R}}} = \overrightarrow{0}}$: **il n'y a pas d'accélération de Coriolis dans le référentiel barycentrique**.

• Soit un vecteur $\overrightarrow{U}$ quelconque. On rappelle la formule de Varignon qui relie les dérivées temporelles de $\overrightarrow{U}$ dans deux référentiels quelconques $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}_1$: $\left(\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{U}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}} = \left(\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{U}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}_1} + \overrightarrow{\Omega}_{\mathcal{R}_1/\mathcal{R}} \times \overrightarrow{U}$.
Dans le cas où $\mathcal{R}_1$ est le référentiel barycentrique $\mathcal{R}^*$ défini par rapport à $\mathcal{R}$, comme $\overrightarrow{\Omega}_{\mathcal{R}^*/\mathcal{R}} = \overrightarrow{0}$, on obtient :
$\left(\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{U}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}} = \left(\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{U}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}^*}$ qu'on notera simplement $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{U}}{\mathrm{d}t}}$ **si** on ne travaille **que** dans $\mathcal{R}$ ou $\mathcal{R}^*$.

II.3 Moment cinétique barycentrique

D'après la loi de composition des moments cinétiques (§**I.3)**), on a :

- dans $\mathcal{R}$:
$\overrightarrow{L_{O/\mathcal{R}}}(\mathcal{S}) = \overrightarrow{L_{A/\mathcal{R}}}(\mathcal{S}) + \overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{p_{\mathcal{S}/\mathcal{R}}}$

- dans $\mathcal{R}^*$:
$\overrightarrow{L_{O/\mathcal{R}^*}}(\mathcal{S}) = \overrightarrow{L_{A/\mathcal{R}^*}}(\mathcal{S}) + \overrightarrow{OA} \times \underbrace{\overrightarrow{p_{\mathcal{S}/\mathcal{R}^*}}}_{\overrightarrow{0}\text{ par définition}}$

❚ Propriété : Dans le référentiel barycentrique $\mathcal{R}^*$, le moment cinétique du système de points $\mathcal{S}$ est indépendant du point où on l'évalue.
On le note $\overrightarrow{L}^*$ et on l'appelle « **moment cinétique barycentrique** » :

$$\forall O,\ \forall A \quad \boxed{\overrightarrow{L_{O/\mathcal{R}^*}}(\mathcal{S}) = \overrightarrow{L_{A/\mathcal{R}^*}}(\mathcal{S}) \equiv \overrightarrow{L}^*(\mathcal{S})}$$

II.4 « Mobile fictif » d'un système à deux corps

Exprimons les éléments cinétique du système $\mathcal{S}$ de deux points matériels dans le référentiel barycentrique :

(1) Pour le moment cinétique : Puisque $\overrightarrow{L}^*$ ne dépend pas du point où on l'évalue, on peut choisir le barycentre G :

$$\overrightarrow{L}^*(\mathcal{S}) = \overrightarrow{L_{G/\mathcal{R}^*}}(\mathcal{S}) = \overrightarrow{GM_1}^* \times m_1\overrightarrow{v_1}^* + \overrightarrow{GM_2}^* \times m_2\overrightarrow{v_2}^* = \overrightarrow{r_1}^* \times m_1\overrightarrow{v_1}^* + \overrightarrow{r_2}^* \times m_2\overrightarrow{v_2}^*$$

$$\text{avec} \begin{cases} \overrightarrow{r_1}^* = \dfrac{-m_2}{m_1+m_2}\,\overrightarrow{r} \\[2mm] \overrightarrow{r_2}^* = \dfrac{m_1}{m_1+m_2}\,\overrightarrow{r} \end{cases} \quad \text{et donc} \begin{cases} \overrightarrow{v_1}^* = \dfrac{-m_2}{m_1+m_2}\,\overrightarrow{v} \\[2mm] \overrightarrow{v_2}^* = \dfrac{m_1}{m_1+m_2}\,\overrightarrow{v} \end{cases} \quad \text{en posant} \quad \boxed{\overrightarrow{v} = \dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{r}}{\mathrm{d}t}}$$

Les deux dernières relations conduisent à : $-m_1\overrightarrow{v_1}^* = m_2\overrightarrow{v_2}^* = \mu\,\overrightarrow{v}$ en posant $\boxed{\mu = \dfrac{m_1 m_2}{m_1+m_2}}$

On en déduit : $\overrightarrow{L}^*(\mathcal{S}) = (\overrightarrow{r_2}^* - \overrightarrow{r_1}^*) \times \mu\,\overrightarrow{v}$
Or : $\overrightarrow{r_2}^* - \overrightarrow{r_1}^* = \overrightarrow{GM_2} - \overrightarrow{GM_1} = \overrightarrow{M_1M_2} \equiv \overrightarrow{r}$, donc : $\boxed{\overrightarrow{L}^*(\mathcal{S}) = \overrightarrow{r} \times \mu\,\overrightarrow{v}}$

Rq : Comme $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{M_1M_2} = \begin{cases} \overrightarrow{GM_2} - \overrightarrow{GM_1} = \overrightarrow{r_2}^* - \overrightarrow{r_1}^* \\ \overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1} = \overrightarrow{r_2} - \overrightarrow{r_1} \end{cases}$, on en déduit que la **position relative** (de M_2 p/r à M_1) est bien indépendante du référentiel où on l'exprime (Cf. **Rq** §**I.1)**)