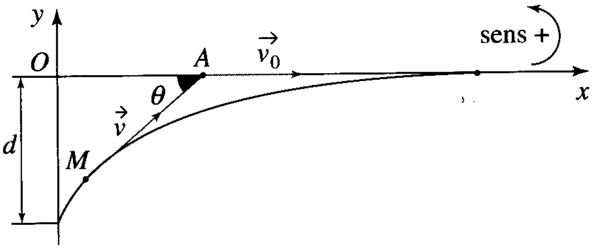
DL n°5 – Le chien de Léonard Euler (**)

Un promeneur A suit un chemin rectiligne avec une vitesse constante v_0. À l'instant initial, son chien M se trouve à une distance d sur la même perpendiculaire au chemin. Puis il court vers son maître à la vitesse v.



On cherche à déterminer la durée de la poursuite.
Soient x et y les coordonnées de M, $r = AM$ et θ défini sur le schéma ci-contre.

1) Exprimer $\dot{x}$ et $\dot{y}$ en fonction de v et θ : pour cela, projeter $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v_{M/\mathcal{R}}}$ dans la base cartésienne.
Exprimer ensuite x et y en fonction de v_0, r, θ et t : pour cela, remarquer que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM}$.
En déduire deux équations différentielles en $r(t)$ et $\theta(t)$ qui peuvent se combiner pour donner le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{r} & = & v_0 \cos\theta - v \\ r\dot{\theta} & = & -v_0 \sin\theta \end{array} \right.$$

2) En déduire une équation différentielle en $r(\theta)$.

Vérifier que l'expression $r = \dfrac{d}{\sin\theta}\left(\tan\dfrac{\theta}{2}\right)^{\frac{v}{v_0}}$ est la solution qui tient compte des conditions initiales.

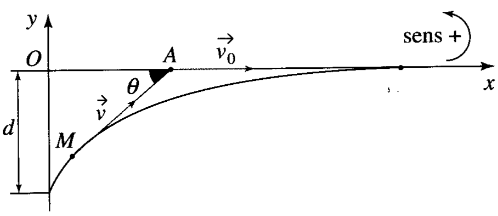
3) Quelle condition v et v_0 doivent-elles vérifier pour que le problème ait une solution ?
Dans ce cas, quelle est la valeur finale de θ ?

4) Écrire une équation différentielle de $\theta(t)$.

5) Déterminer alors la durée τ de la poursuite, sachant que : $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin^2\theta}\left(\tan\frac{\theta}{2}\right)^{\lambda} \mathrm{d}\theta = \frac{\lambda}{\lambda^2 - 1}$

Solution DL n°5 – Le chien de Léonard Euler

1) • La vitesse de M est colinéaire à la direction AM, donc :



$$\overrightarrow{v_M} = \dot{x}\,\overrightarrow{e_x} + \dot{y}\,\overrightarrow{e_y} = v\,\overrightarrow{e_{AM}} \;\Rightarrow\; \left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x} & = & v\cos\theta \quad ① \\ \dot{y} & = & v\sin\theta \quad ② \end{array} \right.$$

• De plus, l'abscisse du point A est : $x_A = v_0.t$
• Et à chaque instant, on peut écrire que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM}$;

ce qui conduit à : $\left\{ \begin{array}{rcl} x & = & v_0 t - r\cos\theta \quad ③ \\ y & = & -r\sin\theta \quad ④ \end{array} \right.$

• En dérivant par rapport au temps ces équations ③ et ④, on obtient de nouvelles expressions de $\dot{x}$ et $\dot{y}$:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x} & = & v_0 - \dot{r}\cos\theta + r\dot{\theta}\sin\theta \quad ⑤ \\ \dot{y} & = & -\dot{r}\sin\theta - r\dot{\theta}\cos\theta \quad ⑥ \end{array} \right. \quad \underset{②}{\overset{①}{\longrightarrow}} \quad \left\{ \begin{array}{rcl} v\cos\theta & = & v_0 - \dot{r}\cos\theta + r\dot{\theta}\sin\theta \quad ⑦ \\ v\sin\theta & = & -\dot{r}\sin\theta - r\dot{\theta}\cos\theta \quad ⑧ \end{array} \right.$$

• Les combinaisons linéaires ⑦$.\cos\theta +$⑧$.\sin\theta$ puis ⑦$.\sin\theta -$⑧$.\cos\theta$ nous donnent alors :

$$\boxed{\begin{array}{rcll} \dot{r} & = & v_0\cos\theta - v & ⑨ \\ r\dot{\theta} & = & -v_0\sin\theta & ⑩ \end{array}}$$

2) Faisons le rapport membre à membre de ces deux équations couplées :

$$\frac{⑨}{⑩} \Rightarrow \frac{\dot{r}}{r\dot{\theta}} = \frac{v_0\cos\theta - v}{-v_0\sin\theta} \Leftrightarrow \boxed{\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} = \frac{v}{v_0\sin\theta} - \frac{\cos\theta}{\sin\theta}} \ \star$$

Pour intégrer $\star$ portant sur $r(\theta)$, on peut l'écrire sous la forme :

$$\frac{\mathrm{d}r}{r} = \frac{v}{v_0\sin\theta}\mathrm{d}\theta - \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\,\mathrm{d}\theta \ \star$$

On peut remarquer que : $\dfrac{\mathrm{d}\ln\tan\frac{\theta}{2}}{\mathrm{d}\theta} = \dfrac{1}{\tan\frac{\theta}{2}}\,\dfrac{1}{2}\,\dfrac{1}{\cos^2\frac{\theta}{2}} = \dfrac{1}{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}} = \dfrac{1}{\sin\theta}$

Alors, l'intégration de $\star$ est évidente :

$$\mathrm{d}\ln r = \frac{v}{v_0}\mathrm{d}\ln\tan\frac{\theta}{2} - \mathrm{d}\ln\sin\theta = \mathrm{d}\ln\frac{\left(\tan\frac{\theta}{2}\right)^{\frac{v}{v_0}}}{\sin\theta} \quad \Rightarrow \quad \ln r = \ln\frac{\left(\tan\frac{\theta}{2}\right)^{\frac{v}{v_0}}}{\sin\theta} + \underbrace{\ln K}_{cste}$$

La constante d'intégration $\ln K$ s'obtient grâce à la condition initiale qui impose, à $t = 0$, *ie* pour $\theta = \dfrac{\pi}{2}$, que $r = d$, soit :

$$\ln d = \ln r(\tfrac{\pi}{2}) = \ln\frac{\left(\tan\frac{\pi}{4}\right)^{\frac{v}{v_0}}}{\sin\frac{\pi}{2}} + \ln K = \ln\frac{1^{\frac{v}{v_0}}}{1} + \ln K = \ln K \quad \Rightarrow K = d$$

D'où : $\boxed{r = \dfrac{d}{\sin\theta}\left(\tan\dfrac{\theta}{2}\right)^{\frac{v}{v_0}}}$

3) Dire que le chien rejoint son maître revient à dire que $\lim\limits_{\theta\to 0} r(\theta) = 0$, soit : $\boxed{v > v_0}$ …ce qui est normal : pour rejoindre son maître, le chien doit courir plus vite que lui !

4) Grâce à ⑩, on peut écrire : $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{v_0\sin\theta}{r} = -\dfrac{v_0}{d}\,\dfrac{\sin^2\theta}{\left(\tan\frac{\theta}{2}\right)^{\frac{v}{v_0}}}}$

Soit encore : $\mathrm{d}t = -\dfrac{d}{v_0}\,\dfrac{1}{\sin^2\theta}\left(\tan\dfrac{\theta}{2}\right)^{\frac{v}{v_0}}\mathrm{d}\theta$

5) Le temps que le chien rattrape le maître, t a varié de 0 à τ et θ de $\dfrac{\pi}{2}$ à 0, soit :

$$\int_0^\tau \mathrm{d}t = -\int_{\pi/2}^0 \frac{d}{v_0}\,\frac{1}{\sin^2\theta}\left(\tan\frac{\theta}{2}\right)^{\frac{v}{v_0}}\mathrm{d}\theta \quad \Rightarrow \quad \boxed{\tau = \frac{d}{v_0}\,\frac{\frac{v}{v_0}}{\left(\frac{v}{v_0}\right)^2 - 1}} \quad (\text{défini car } \ v > v_0)$$

Source : d'après HPrépa, Mécanique, 1e année, MPSI-PCSI-PTSI, 2003, p. 26, 29-30.