Leçon M2/M3 – Méthodes

■ Comment démarrer un problème de mécanique ?

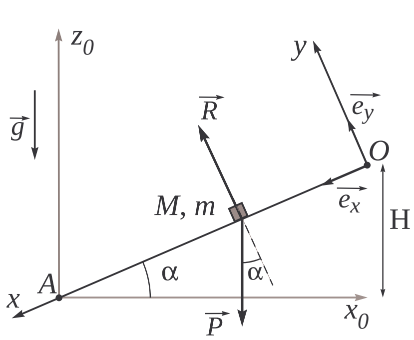
❏ **Méthode 1.—** Toujours commencer, dans l'ordre, par :
• Recopier le schéma de l'énoncé pour y faire apparaître les données du problème.
• Définir le système $\mathcal{S}$ (assimilé à un point matériel M de masse m : $\mathcal{S} = \{M,\, m\}$)
• Choisir un référentiel d'étude $\mathcal{R}$, bien préciser le caractère galiléen ou non de $\mathcal{R}$
• Choisir la base de projection adaptée au problème (base qui facilite la description du mouvement ; ➜ Cf **Méthode 2**)
• Faire un bilan complet des forces qui s'exercent sur $\mathcal{S}$:
- forces de contact et interactions à distances (« forces vraies »)
- si le référentiel est non galiléen, ajouter les forces d'inertie d'entraînement et de Coriolis (➜ Cf Cours **M8**).

Attention ! Le poids d'un corps n'existe que dans le référentiel terrestre pour lequel la verticale associée au sol terrestre a un sens.
Il est donc interdit d'introduire le poids dans un autre référentiel que le référentiel terrestre. Pour éviter cette horrible erreur, il suffit de respecter la démarche suivante :
① Toujours commencer à définir le référentiel dans lequel on étudie le système $\mathcal{S}$
② Lorsqu'il s'agit du référentiel terrestre, faire immédiatement le schéma du repère cartésien $(Oxyz)$ associé à $\mathcal{R}$ et y placer le vecteur champ de pesanteur $\overrightarrow{g}$
③ Ce n'est que lorsque $\overrightarrow{g}$ apparaît sur le schéma à la suite des étapes ① et ② qu'on peut introduire le poids $\overrightarrow{P} = m\overrightarrow{g}$ de $\mathcal{S}$. Sinon, cela n'a pas de sens !

■ Comment choisir la base adaptée ?

❏ **Méthode 2.—** Pour choisir une base adaptée au problème il faut considérer la nature du mouvement ou le point de vue « naturel » du problème ; on choisira :
• une base cartésienne pour un mouvement rectiligne (cf. **Ex-M2.2-3, 6-7, 9**) ou balistique (cf. **Ex-M2.13-14**)
• la base polaire pour un mouvement circulaire (cf. **Ex-M2.4, 10, DM2, Ex-M3.6, 9, 11**)
• la base cylindrique pour un mouvement qui privilégie un axe Oz (cf. **Ex-M2.12, DL6**)

Ex1 : Soit un palet assimilé à un point matériel M de masse m descendant sans vitesse initiale depuis le point O sur une pente faisant l'angle α avec l'horizontale. On néglige les frottements et le référentiel lié au sol (= référentiel terrestre) est supposé galiléen. On note g l'intensité du champ de pesanteur terrestre.
♦ **Q :** Déterminer $v(t)$, l'évolution de sa vitesse au cours du temps.



Rép : • Le système $\mathcal{S} = \{M,\, m\}$ est étudié dans le référentiel $\mathcal{R}$ terrestre supposé galiléen.
• Il est soumis à son poids $\overrightarrow{P} = m\overrightarrow{g}$ et à la réaction $\overrightarrow{R}$ de la piste. Comme il n'y a pas de frottements, $\overrightarrow{R}$ est orthogonale à la vitesse, donc au mouvement qui a lieu selon l'axe Ox.

• Puisque $\overrightarrow{v}_{M/\mathcal{R}} = v_x\overrightarrow{e_x}$ et que $\overrightarrow{R} = R_y\,\overrightarrow{e_y}$ on devine qu'il sera plus facile de travailler dans le repère (Oxy) que dans le repère (Ox_0z_0).
➜ On projette donc les forces et le **P.F.D.** dans la base $(\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y})$.
Comme la verticale Oz_0 donne la direction de $\overrightarrow{P}$ et que Ox_0 fait un angle α avec $\overrightarrow{e_x}$, $\overrightarrow{P}$ fait un angle α avec $\overrightarrow{e_y}$: $\overrightarrow{P} = P_x\overrightarrow{e_x} + P_y\overrightarrow{e_y} = mg\sin\alpha\overrightarrow{e_x} - mg\cos\alpha\overrightarrow{e_y}$
Par ailleurs : $\overrightarrow{R} = R_y\overrightarrow{e_y}$
• La seconde loi de Newton (**P.F.D.**) s'écrit : $m\left|\begin{array}{l}\ddot{x}\\ \ddot{y}\end{array}\right. = \left|\begin{array}{l}mg\sin\alpha\\ -mg\cos\alpha\end{array}\right. + \left|\begin{array}{l}0\\ R_y\end{array}\right.$
En projetant cette équation vectorielle selon $\overrightarrow{e_x}$, et en remarquant que $\ddot{x} = \dot{v}_x$, on obtient :
$m\dot{v}_x = mg\sin\alpha$ d'où $\boxed{v(t) = v_x(t) = g\sin\alpha\,.t}$

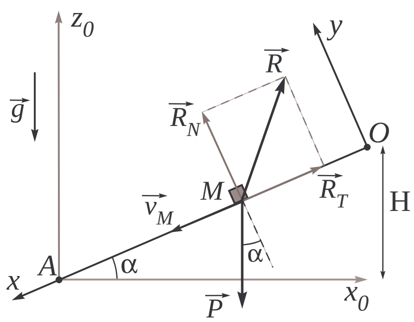
■ Comment déterminer les composantes de la réaction d'un support solide sur un point matériel ?

❑ **Méthode 3.—** Après avoir appliqué la **Méthode 1** :
- on projette le **P.F.D.** dans la base adaptée au problème et
- on applique les lois de Coulomb lorsqu'il y a des frottements solide/solide.

▮**Rappel des lois de Coulomb :** • Lorsqu'on écrit $\overrightarrow{R} = \overrightarrow{R_N} + \overrightarrow{R_T}$ avec :
- $\overrightarrow{R_N}$: la **composante normale** (au support) de la réaction $\overrightarrow{R}$ du support solide sur le point matériel M
- $\overrightarrow{R_T}$: la **composante tangentielle** (au support et au vecteur vitesse) de la réaction $\overrightarrow{R}$
• Tant que le solide modélisé par le point matériel M ne glisse pas par rapport au support : $\| \overrightarrow{R_T} \| \leq \mu_S \| \overrightarrow{R_N} \|$ où μ_S est le cœfficient de frottement statique pour le contact solide/support étudié.
• Lorsque le solide M glisse par rapport au support : $\| \overrightarrow{R_T} \| = \mu_D \| \overrightarrow{R_N} \|$ où $\mu_D = \mu$ est le **cœfficient de frottement** dynamique pour le contact solide/support étudié.

Rq : en toute rigueur $\mu_S > \mu_D$, mais lorsqu'un énoncé parle d'un seul cœfficient de frottement μ, il s'agit du cœfficient de frottement dynamique : $\mu = \mu_D$.

Ex2 : On modifie l'exemple précédent en supposant, cette fois, que le cœfficient de frottement μ du palet contre le plan incliné n'est pas nul.
♦ **Q :** Déterminer la réaction $\overrightarrow{R}$ du support en fonction de m, g, μ et α.



Rép : On commence par modifier et compléter le schéma.
Comme $R_x = -\| \overrightarrow{R_T} \| = -R_T$ et $R_y = \| \overrightarrow{R_N} \| = R_N$:

La seconde loi de Newton (**P.F.D.**) s'écrit : $m\left|\begin{array}{l}\ddot{x}\\ \ddot{y}\end{array}\right. = \left|\begin{array}{l}mg\sin\alpha\\ -mg\cos\alpha\end{array}\right. + \left|\begin{array}{l}-R_T\\ R_N\end{array}\right.$

La projection de cette équation vectorielle selon $\overrightarrow{e_x}$ et $\overrightarrow{e_y}$ donne, puisque $y = \text{Cste}$ (soit : $\ddot{y} = 0$) :
$$\left\{\begin{array}{lll} m\ddot{x} & = & mg\sin\alpha - R_T \quad ① \\ 0 & = & -mg\cos\alpha + R_N \quad ② \end{array}\right.$$
Soit : $\boxed{R_N = mg\cos\alpha}$ et $\boxed{R_T = \mu.R_N = \mu.mg\cos\alpha}$

■ Comment utiliser les conditions initiales pour déterminer les constantes d'intégration de l'équation horaires du mouvement ?

Ex3 : On suppose que dans l'exemple précédent, M est propulsé, à $t = 0$, depuis un point M_0 d'abscisse $OM_0 = x_0$ avec la vitesse initiale v_0.

♦ **Q :** En déduire la position $OM = x(t)$ au cours du temps.

Rép : • L'équation ① devient, après simplification par m et factorisation par g :

$$\boxed{\ddot{x} = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)} \quad (=\text{Cste : mouvement uniformément accéléré})$$

• **L'intégration de l'accélération donne la vitesse :**

$$v(t) = \dot{x}(t) = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)t + A \quad (\text{où } A \text{ est une constante à déterminer})$$

Comme $\dot{x}(0) = \begin{cases} v_0 & \text{d'après la 2}^\text{e} \textbf{ C}\text{ondition } \textbf{I}\text{nitiale de l'énoncé} \\ A & \text{d'après le calcul littéral} \end{cases}$ on en déduit $A = v_0$,

soit : $\boxed{v(t) = \dot{x}(t) = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)t + v_0}$

• **L'intégration de la vitesse donne la position :**

$$x(t) = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)\frac{t^2}{2} + v_0.t + B \quad (\text{où } B \text{ est une constante à déterminer})$$

Comme $x(0) = \begin{cases} x_0 & \text{d'après la 1}^\text{e} \textbf{ C}\text{ondition } \textbf{I}\text{nitiale de l'énoncé} \\ B & \text{d'après le calcul littéral} \end{cases}$ on en déduit $B = x_0$,

soit : $\boxed{x(t) = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)\frac{t^2}{2} + v_0.t + x_0}$

■ Comment déterminer un coefficient de frottement ?

❏ **Méthode 4.—** On se place à la limite de glissement pour laquelle : - le solide est sur le point de quitter sa position d'équilibre on a encore $\overrightarrow{F_\text{ext}} \cong \overrightarrow{0}$
- le solide commence tout juste de glisser : $R_T = \mu.R_N$

Ex4 : Dans le cas de l'exemple **Ex2**, on suppose que le palet commence à glisser pour $\alpha_0 = 30°$.

Q : En déduire la valeur de μ.

Rép : $\mathcal{S} = \{M, m\}$ est étudié dans le référentiel $\mathcal{R}$ terrestre supposé galiléen n'est soumis qu'à son poids et à la réaction du support.

- Au moment où M est sur le point que quitter sa position d'équilibre, on a encore $\overrightarrow{a_{M/\mathcal{R}}} = \overrightarrow{0}$.
La 2e loi de Newton s'écrit :

$$\overrightarrow{P} + \overrightarrow{R} = \overrightarrow{0} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} mg\sin\alpha - R_T & = & 0 \\ -mg\cos\alpha + R_N & = & 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} R_T & = & mg\sin\alpha \\ R_N & = & mg\cos\alpha \end{cases}$$

- Comme par ailleurs, le palet commence tout juste de glisser : $R_T = \mu.R_N$

Soit : $\boxed{\mu = \frac{R_T}{R_N} = \tan\alpha_0}$ $\Rightarrow$ **A.N. :** $\boxed{\mu = \tan\frac{\pi}{6} = 0,58}$

■ Comment calculer le travail d'une force conservative/dérivant d'une $\mathcal{E}_p$ connue ?

❏ **Méthode 5.—** On revient à la définition d'une force conservative :
$\delta W(\overrightarrow{F_C}) = -\text{d}\mathcal{E}_p \Rightarrow W_{A\to B}(\overrightarrow{F_C}) = -\Delta\mathcal{E}_p \Leftrightarrow W_{A\to B}(\overrightarrow{F_C}) = \mathcal{E}_p(A) - \mathcal{E}_p(B)$

Ex5 : Si on reprend **Ex2** avec M se déplaçant de O vers A, le travail du poids est :
$W(\overrightarrow{P}) = -\Delta\mathcal{E}_{p,g} = -(mgz_{0,A} - mgz_{0,O})$ soit $\boxed{W(\overrightarrow{P}) = mgH}$ (> 0 : travail moteur)

Rq : Ici, $\mathcal{E}_{p,g}(M) = +mgz_{0,M}$ car la verticale Oz_0 est ascendante (cf. schéma, p. 2 !)

■ Comment calculer le travail d'une force quelconque ?

❏ **Méthode 6.—** Pour calculer le travail d'une force quelconque, on revient à la définition :

$$W_{A\to B}(\overrightarrow{F}) = \int_A^B \delta W = \int_A^B \overrightarrow{F} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{OM}$$

(l'expression de la force $\overrightarrow{F}$ ou la nature de la trajectoire entre A et B permettant de savoir dans quelle base exprimer le déplacement élémentaire)

Ex6 : Si on reprend **Ex2** avec M se déplaçant de O vers A, le travail de la réaction $\overrightarrow{R}$ est :

$$W(\overrightarrow{R}) = W(\overrightarrow{R_N}) + W(\overrightarrow{R_T}) = \int_O^A \underbrace{R_N\overrightarrow{e_y} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{OM}}_{=0 \text{ car } \overrightarrow{R_N}\perp \mathrm{d}\overrightarrow{OM}} + \int_O^A -R_T\overrightarrow{e_x} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{OM}$$

Soit : $W(\overrightarrow{R}) = \int_O^A -\mu.mg\cos\alpha\overrightarrow{e_x} \cdot \mathrm{d}x.\overrightarrow{e_x} = \int_0^{x_A} -\mu.mg\cos\alpha\,\mathrm{d}x = -\mu.mg.x_A\cos\alpha$

Comme $x_A = OA = \dfrac{H}{\sin\alpha}$, on peut aussi écrire : $\boxed{W(\overrightarrow{R}) = -\mu.mg.H\mathrm{cotan}\,\alpha}$.

■ Quand utiliser le théorème de l'énergie cinétique ?

❏ **Méthode 7.—** On peut appliquer le **Thm de l'$\mathcal{E}_k$** :
- lorsque, connaissant la norme de la vitesse d'un point en une position A, on cherche la norme de sa vitesse en B
- lorsqu'on le travail de chacune des forces extérieures est facilement calculable.

Ex7 : Si on reprend **Ex2**, on peut facilement exprimer la vitesse de M en A en appliquant le **Thm de l'$\mathcal{E}_k$** car :
- la vitesse initiale en O est connue ($v_O = 0$),
- on peut facilement calculer le travail du poids (cf. **Ex5**) et celui de la réaction du support (cf. **Ex6**). D'où :

$$\Delta\mathcal{E}_{k,O\to A} = W(\overrightarrow{F_{\text{ext}}}) \quad\Leftrightarrow\quad \frac{1}{2}mv_A^2 - \frac{1}{2}m\cancel{v_O^2} = W(\overrightarrow{P}) + W(\overrightarrow{R})$$

On en déduit : $\boxed{v_A = \sqrt{2gH\,(1-\mu\mathrm{cotan}\,\alpha)}}$

Rq : Pour que v_A existe, il faut que $\tan\alpha > \mu$, soit, d'après **Ex4** : $\alpha > \alpha_0 = 30°$.

■ Quand est-il préférable d'utiliser plutôt le théorème de l'énergie mécanique ?

❏ **Méthode 8.—** Le **Thm de l'$\mathcal{E}_m$** est très utile lorsqu'il n'y a pas de forces dissipatives (pas de frottements). L'application du **Thm de l'$\mathcal{E}_m$** conduit alors à :

$$\delta\mathcal{E}_m = \delta W_{NC} = 0 \quad\Leftrightarrow\quad \mathcal{E}_m = \mathrm{Cte}$$

$\Rightarrow$ L'énergie mécanique est une constante du mouvement et le système est qualifié de conservatif.
$\Rightarrow$ La dérivation temporelle de l'équation $\mathcal{E}_m = \mathrm{Cte}$ (avec $\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_k + \mathcal{E}_p$) donne alors accès à l'équation du mouvement.
$\Delta\mathcal{E}_{m,A\to B} = W_{NC} = 0$

$$\Leftrightarrow \mathcal{E}_m(A) = \mathcal{E}_m(B) \Leftrightarrow \mathcal{E}_k(A) + \mathcal{E}_p(A) = \mathcal{E}_k(B) + \mathcal{E}_p(B)$$

Rq : Pour appliquer le **Thm de l'$\mathcal{E}_m$** ou bien le **Thm de l'$\mathcal{E}_k$** pour un point M évoluant entre un état A et un état B, il faut prendre soin de correctement définir l'état initial (position de A, vitesse de A) et l'état final (position de B, vitesse de B).

Ex8 : On lâche un point matériel $\{M, m\}$ de la hauteur h dans le référentiel terrestre. On néglige les frottements dûs à l'air.

■ Comment utiliser le théorème de l'énergie mécanique ?

$\Delta\mathcal{E}_m = W_{NC}$ avec $W_{NC} = W(\overrightarrow{R})$
Comme $\overrightarrow{R} \perp \overrightarrow{v}_{M/\mathcal{R}}$ (aucun frottements) on a : $\delta W(\overrightarrow{R}) = \overrightarrow{R} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{R} \cdot \overrightarrow{v_{M/\mathcal{R}}}\mathrm{d}t = 0$, donc : $W_{NC} = 0$.
On en conclut : $\Delta\mathcal{E}_m = 0$ soit : $\mathcal{E}_m(M) = \mathcal{E}_m(A)$ (en l'absence de frottements, l'énergie mécanique est constante et le système est conservatif).

Avec : $\begin{cases} \mathcal{E}_m(A) = \frac{1}{2}mv_A^2 + mgz_A = 0 + mgh \\ \mathcal{E}_m(M) = \frac{1}{2}mv_M^2 + mgz_M = \frac{1}{2}mv^2 + mga(1-\cos\theta) \end{cases}$

Donc : $\mathcal{E}_m(M) = \mathcal{E}_m(A) \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}\cancel{m}v^2 + \cancel{m}ga(1-\cos\theta) = \cancel{m}gh \quad \Rightarrow \boxed{v = \sqrt{2g(h - a(1-\cos\theta))}}$