M3 – ÉNERGIE(S) D'UN POINT MATÉRIEL

OBJECTIFS

Les principes fondamentaux de la dynamique ou lois de Newton (➜ Cf. Cours **M2**) permettent d'établir les équations différentielles du mouvement, leur résolution fournit l'expression des variables en fonction du temps et ainsi une connaissance complète des mouvements futurs.
Toutefois, l'intégration des équations n'est pas toujours possible et dans ce cas, l'utilisation de constantes du mouvement permet tout de même une description partielle de l'évolution du système. Parmi ces constantes, il peut y avoir la quantité de mouvement (Cf. **M2.I.1)**), le moment cinétique (➜ Cf Cours **M6**) et l'**énergie mécanique** qui est au cœur de cette leçon.
Les raisonnements énergétiques permettront l'étude plus ou moins complète du système (Cf. **IV.3** et **V**), mais en aucun cas ils n'apporteront plus d'information que le principe fondamental. Les théorèmes établis dans ce chapitre découlent en effet des principes fondamentaux (Cf. **II.3)** et **IV.2)**).
Sur le fond, il n'y a donc rien de nouveau, il ne s'agit que d'une mise en forme différente de ce qui a déjà été postulé, ce qui permettra dans certains cas d'appréhender plus rapidement et plus efficacement le comportement du système.

Objectifs de cette leçon :

• Notions de puissance et de travail d'une force.
• Théorème de l'énergie cinétique et théorème de la puissance cinétique.
• Notion de force conservative et d'énergie potentielle dont dérive une telle force.
• Savoir exprimer : (a) l'énergie potentielle de pesanteur ; (b) l'énergie potentielle gravitationnelle ; (c) l'énergie potentielle électrostatique ; (d) l'énergie potentielle élastique.
• Théorème de l'énergie mécanique et théorème de la puissance mécanique.
• Savoir établir la conservation de l'énergie mécanique pour les systèmes conservatifs.

I Puissance et travail d'une force appliquée à un point matériel

I.1 Travail élémentaire d'une force

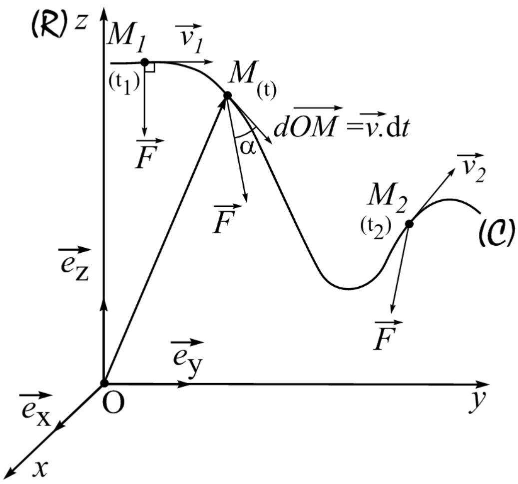
Soit un référentiel $\mathcal{R}$ et M un point matériel qui décrit une trajectoire $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{R}$ entre t_1 et t_2, étant soumis à la force $\overrightarrow{F}$.
Cette trajectoire peut être décomposée en une succession de **déplacements élémentaires** : $\overrightarrow{MM'} = \mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \mathrm{d}\overrightarrow{r} = \overrightarrow{v_{M/\mathcal{R}}}\mathrm{d}t$.

♢ **Définition : Travail élémentaire** (unité : le Joule $[J]$)

- fourni par la force $\overrightarrow{F}$
- au point M
- pendant la durée $\mathrm{d}t$ (entre t et $t+\mathrm{d}t$) :

$$\delta W \equiv \overrightarrow{F} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{v_{M/\mathcal{R}}}\mathrm{d}t$$

• Si $\delta W > 0$, le travail élémentaire est **moteur** ;
• si $\delta W < 0$, le travail élémentaire est **résistant**.
• Lorsque $\overrightarrow{F} \perp \mathrm{d}\overrightarrow{OM} \Leftrightarrow \overrightarrow{F} \perp \mathrm{d}\overrightarrow{v_{M/\mathcal{R}}}$ on dit que la force $\overrightarrow{F}$ ne travaille pas entre t et $t+\mathrm{d}t$: $\delta W = 0$.



Rq 1 : $\delta W = \| \overrightarrow{F} \| \,.\, \| \mathrm{d}\overrightarrow{OM} \| \cos\alpha$

avec $\| \overrightarrow{F} \| \cos\alpha$ qui représente la projection orthogonale de $\overrightarrow{F}$ sur la direction du déplacement élémentaire $\mathrm{d}\overrightarrow{OM}$.

Rq 2 : Dimension d'un travail (élémentaire) : $[\delta W] = [F][\mathrm{d}r] = [m][a][\mathrm{d}r] = M.LT^{-2}.L$, soit : $[\delta W] = ML^2T^{-2}$

Rq 3 : Expressions du travail élémentaire en fonction de la base de projection choisie :

$$\begin{aligned}
\delta W &= F_x.\mathrm{d}x + F_y.\mathrm{d}y + F_z.\mathrm{d}z && \leftarrow \text{base cartésienne}\\
&= F_r.\mathrm{d}r + F_\theta.r\mathrm{d}\theta + F_z.\mathrm{d}z && \leftarrow \text{base cylindrique}\\
&= F_r.\mathrm{d}r + F_\theta.r\mathrm{d}\theta + F_\varphi.r\sin\theta\mathrm{d}\varphi && \leftarrow \text{base sphérique}
\end{aligned}$$

I.2 Travail d'une force pour un déplacement fini

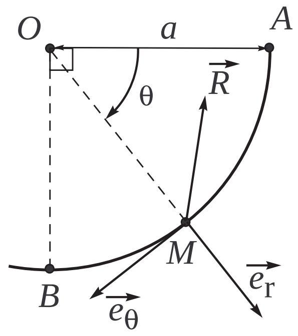
♢ **Définition : Travail fini d'une force** s'exerçant sur un point M se déplaçant, dans le référentiel $\mathcal{R}$, entre M_1 et M_2 le long d'une trajectoire $\mathcal{C}$:

$$W = W_{M_1\to M_2}(\overrightarrow{F}) = \int_{M_1}^{M_2} \delta W = \int_{M_1}^{M_2} \overrightarrow{F} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{r} = \int_{M_1}^{M_2} \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{v_{M/\mathcal{R}}}\mathrm{d}t$$

Rq : *A priori*, $W(\overrightarrow{F})$ dépend du référentiel d'étude (tout comme δW) et du chemin $\mathcal{C}$ suivi par M pour aller de M_1 vers M_2.

Exercice : Dans le référentiel $\mathcal{R}$, un point matériel glisse sur une gouttière circulaire qui exerce sur lui des frottements de norme constante ($\| \overrightarrow{R_T} \| = \text{Cte} = f$).

♦ **Q :** Exprimer en fonction de f et de a, rayon de la gouttière, le travail de la réaction du support sur le point M lorsqu'il se déplace de A ($\theta = 0$) vers B ($\theta = \frac{\pi}{2}$).



I.3 Puissance d'une force

♢ **Définition :** On appelle **puissance (instantanée) d'une force** fournie à un point M, à l'instant t, de vitesse $\overrightarrow{v_{M/\mathcal{R}}}$ dans le référentiel $\mathcal{R}$ la grandeur :

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}_{/\mathcal{R}}(\overrightarrow{F}, t) = \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{v_{M/\mathcal{R}}} = \frac{\delta W}{\mathrm{d}t}$$ (unité : le Watt $[W]$)

Rq 1 : Dimension d'une puissance : $[\mathcal{P}] = \frac{[\delta W]}{\mathrm{d}t} = \frac{[W]}{T}$, soit : $[\mathcal{P}] = ML^2T^{-3}$

Puisque la vitesse $\overrightarrow{v_{M/\mathcal{R}}}$ d'un point M dépend du référentiel d'étude, δW et la puissance $\mathcal{P}_{/\mathcal{R}}$ dépendent du référentiel $\mathcal{R}$ dans lequel on les exprime.

Rq 2 : On appelle **puissance moyenne** de la force $\overrightarrow{F}$ s'exercçant sur un point M se déplaçant entre M_1 et M_2 pendant la durée $\Delta t = t_2 - t_1$:

$$< \mathcal{P} >= \frac{W_{M_1\to M_2}(\overrightarrow{F})}{t_2 - t_1} = \frac{W}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta t}\int_{M_1}^{M_2} \delta W = \frac{1}{\Delta t}\int_{M_1}^{M_2} \mathcal{P}(t)\mathrm{d}t$$

Ainsi, la puissance moyenne correspond à la moyenne temporelle de la puissance instantanée sur la durée Δt.

II Énergie cinétique d'un point matériel

II.1 Définition

◇ **Définition :** On appelle **énergie cinétique** d'un point matériel animé de la vitesse $\overrightarrow{v_{M/\mathcal{R}}}$ dans le référentiel $\mathcal{R}$ la grandeur, notée $\mathcal{E}_k$:

$$\mathcal{E}_k = \frac{1}{2}mv^2_{M/\mathcal{R}} = \frac{p^2_{M/\mathcal{R}}}{2} \quad \text{(unité : le Joule } [J])$$

Rq : Là encore, tout comme la vitesse, l'énergie cinétique dépend du référentiel d'étude $\mathcal{R}$.

II.2 Théorème de la puissance cinétique

Dérivons l'énergie cinétique par rapport au temps :

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_k}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}m\frac{\mathrm{d}v^2_{M/\mathcal{R}}}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}m\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{v_{M/\mathcal{R}}}^2}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}m(2.\overrightarrow{a_{M/\mathcal{R}}}\cdot\overrightarrow{v_{M/\mathcal{R}}}) = m\overrightarrow{a_{M/\mathcal{R}}}\cdot\overrightarrow{v_{M/\mathcal{R}}}$$

Lorsqu'on travaille dans un référentiel galiléen $\mathcal{R} = \mathcal{R}_g$, on peut introduire la seconde loi de Newton ($m\overrightarrow{a_{M/\mathcal{R}_g}} = \overrightarrow{F}_{\text{ext}\to M} = \sum_i \overrightarrow{F}_{i\to M}$) :

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_k}{\mathrm{d}t} &= \overrightarrow{F}_{\text{ext}\to M}\cdot\overrightarrow{v_{M/\mathcal{R}_g}} &&= \mathcal{P}_{/\mathcal{R}_g}(\overrightarrow{F}_{\text{ext}\to M}) &&= \mathcal{P}\\ &= \sum_i \overrightarrow{F}_{i\to M}\cdot\overrightarrow{v_{M/\mathcal{R}_g}} &&= \sum_i \mathcal{P}_{/\mathcal{R}_g}(\overrightarrow{F}_{i\to M}) &&= \sum_i \mathcal{P}_i\end{aligned}$$

Retenir :

Théorème de la puissance cinétique : Dans un référentiel galiléen $\mathcal{R}_g$, la puissance de la résultante des forces qui s'appliquent sur un point matériel M est égale à la dérivée temporelle de l'énergie cinétique de ce point M.

$$\mathcal{P}(\overrightarrow{F}_{\text{ext}\to M}) = \frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_k}{\mathrm{d}t}$$

II.3 Théorème de l'énergie cinétique

Entre t et $t+\mathrm{d}t$, l'énergie cinétique varie de la variation élémentaire :

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\mathcal{E}_k = \mathcal{P}.\mathrm{d}t = \frac{\delta W}{\mathrm{d}t}.\mathrm{d}t = \delta W &= \delta W(\overrightarrow{F}_{\text{ext}\to M}) &&= \overrightarrow{F}_{\text{ext}\to M}\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{OM}\\ &= \sum_i \delta W(\overrightarrow{F}_{i\to M}) &&= \sum_i \overrightarrow{F}_{i\to M}\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{OM}\end{aligned}$$

Pour une durée finie $\delta t = t_2 - t_1$, c'est-à-dire entre un instant t_1 où M se trouve en un point M_1 et un instant t_2 où M se trouve en un point M_2 :

$$\int_{t_1}^{t_2}\mathrm{d}\mathcal{E}_k = \int_{t_1}^{t_2}\delta W = \int_{M_1}^{M_2}\delta W \quad\Leftrightarrow\quad \underbrace{\mathcal{E}_k(\text{final}) - \mathcal{E}_k(\text{initial})}_{\Delta\mathcal{E}_k} = W_{M_1\to 2}(\overrightarrow{F}_{\text{ext}\to M})$$

Théorème de l'énergie cinétique : - pour un déplacement élémentaire : $\mathrm{d}\mathcal{E}_k = \delta W$
La **variation élémentaire de l'énergie cinétique**, entre t et $t+\mathrm{d}t$, est égale au **travail élémentaire** des forces qui s'exercent sur M.

- sur un chemin fini : $\Delta\mathcal{E}_k = W_{M_1\to 2}(\overrightarrow{F}_{\text{ext}})$ La **variation finie de l'énergie cinétique**, entre l'instant t_1 où M se trouve en M_1 et l'instant t_2 où M se trouve en M_2, est égale au **travail fini** des forces qui s'exercent sur M depuis M_1 jusqu'à M_2.

III Énergie potentielle d'un point matériel

III.1 Force conservative et énergie potentielle

◇ **Définition :** Une force $\overrightarrow{F}$ dérive d'une **énergie potentielle** $\mathcal{E}_p$ lorsqu'on peut écrire :

$$\delta W(\overrightarrow{F}) = -\mathrm{d}\mathcal{E}_p$$

On dit alors que $\overrightarrow{F}$ est une **force conservative**.

$$W_{M_1\to M_2}(\overrightarrow{F}_{\text{cons}}) = \int_{M_1}^{M_2} \delta W = \int_{M_1}^{M_2} -\mathrm{d}\mathcal{E}_p = -\Big[\mathcal{E}_p\Big]_{M_1}^{M_2} = -(\mathcal{E}_p(M_2) - \mathcal{E}_p(M_1)) = -\Delta\mathcal{E}_p$$

propriété d'un champ de force conservatif :

$$W(\overrightarrow{F}_{\text{cons}}) = -\Delta\mathcal{E}_p \quad \Leftrightarrow \quad W_{M_1\to M_2}(\overrightarrow{F}_{\text{cons}}) = \mathcal{E}_p(M_1) - \mathcal{E}_p(M_2)$$

- Le travail d'une force conservative $\left\{\begin{array}{l}\textbf{ne dépend pas} \text{ du chemin } \mathcal{C} \text{ suivi par } M \\ \text{est égal à la } \textbf{diminution} \text{ de l'énergie potentielle}\end{array}\right.$
- En particulier, pour une trajectoire fermée, lorsque $M_1 = M_2 = A$: $W_{A\to A}(\overrightarrow{F}_{\text{cons}}) = 0$

Rq : Attention à ne pas confondre la *variation* d'énergie potentielle $\Delta\mathcal{E}_p = \mathcal{E}_p(\text{final}) - \mathcal{E}_p(\text{initial})$ avec la *diminution* d'énergie potentielle qui en est l'opposé $(-\Delta\mathcal{E}_p)$.

III.2 Exemples de forces dérivant d'une énergie potentielle

a Poids et énergie potentielle de pesanteur

On travaille dans le référentiel terrestre, dans une zone de l'espace où le champ de pesanteur est uniforme : $\overrightarrow{g} = \overrightarrow{\text{Cte}}$. Si la verticale est ascendante : $\overrightarrow{g} = -g\overrightarrow{e_z}$.
Pour un point matériel $\mathcal{S} = \{M, m\}$, le travail élémentaire du poids $\overrightarrow{P} = m\overrightarrow{g}$ qu'il subit est :

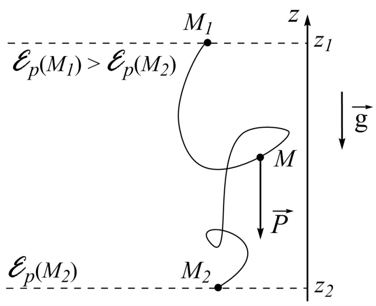
$$\delta W(\overrightarrow{P}) = m\overrightarrow{g}\,.\,\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \mathrm{d}(m\overrightarrow{g}\,.\,\overrightarrow{OM}) = -\mathrm{d}\mathcal{E}_{p,g} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{E}_{p,g} = -m\overrightarrow{g}\,.\,\overrightarrow{OM} + \text{Cte}$$

Comme, en base cartésienne, $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{e_x} + y\overrightarrow{e_y} + z\overrightarrow{e_z}$, on peut exprimer l'énergie potentielle de pesanteur, pour une verticale ascendante, de deux manières possibles :

$$\left\{\begin{array}{l}\delta W(\overrightarrow{P}) = -mg\overrightarrow{e_z}\,.\,(\mathrm{d}x\overrightarrow{e_x} + \mathrm{d}y\overrightarrow{e_y} + \mathrm{d}z\overrightarrow{e_z}) = -mg\mathrm{d}z = -\mathrm{d}\mathcal{E}_{p,g} \\ \mathcal{E}_{p,g} = -m\overrightarrow{g}\,.\,\overrightarrow{OM} + \text{Cte} = mg\overrightarrow{e_z}\,.\,(x\overrightarrow{e_x} + y\overrightarrow{e_y} + z\overrightarrow{e_z}) + \text{Cte}\end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{E}_{p,g} = mgz + \text{Cte}$$

L'énergie potentielle (ici, de pesanteur) est définie à une constante près qu'il revient à l'utilisateur de fixer.
Cette constante n'a pas de valeur physique. Seule la variation d'énergie potentielle $\Delta\mathcal{E}_p$ (ou $\mathrm{d}\mathcal{E}_p$) a une signification physique pusiqu'elle s'identifie à $-W$ (ou $-\delta W$), opposé du travail de la force conservative. Sur le graphe ci-contre :

$$W_{M_1\to M_2}(\overrightarrow{P}) = -\Delta\mathcal{E}_{p,g} = \mathcal{E}_p(M_1) - \mathcal{E}_p(M_2) = mg(z_1 - z_2)$$



Rq 1 : Dans le cas d'une chute d'une hauteur $z_1 - z_2 = h > 0$,
le travail du poids est $W_{M_1\to M_2} = mgh > 0$: ainsi, une chute d'eau produit un travail qui peut servir à faire tourner les alternateurs d'un barrage hydro-électrique.

Rq 2/Déf : Les **(surfaces) équipotentielles** sont les surfaces sur lesquelles $\mathcal{E}_p = \text{Cte}$. Dans le cas de l'énergie potentielle de pesanteur, il s'agit de **plans horizontaux** $z = \text{Cte}$.
➜ **Retenir :** plus on s'élève en altitude, et plus $\mathcal{E}_{p,g}$ augmente.

IV Énergie mécanique

◇ **Définition :** On appelle **énergie mécanique** d'un point matériel la somme de son énergie cinétique et de son énergie potentielle : $\mathcal{E}_m \equiv \mathcal{E}_k + \mathcal{E}_p$

IV.1 Intégrale première de l'énergie mécanique

Hyp : Soit un point matériel $\{M, m\}$ dont les forces $\overrightarrow{F_1}$, $\overrightarrow{F_2}$, $\overrightarrow{F_3}$ ... qui lui sont appliquées
- dérivent d'une énergie potentielle (par ex. $\overrightarrow{F_1}$ et $\overrightarrow{F_2}$ sont des forces conservatives) [a]
- *ou bien* ne travaillent pas (par exemple $\overrightarrow{F_3} = \overrightarrow{R} \perp \overrightarrow{v_{M/\mathcal{R}}}$, ou bien $\overrightarrow{F_3} = q\overrightarrow{v_{M/\mathcal{R}}} \times \overrightarrow{B} \perp \overrightarrow{v_{M/\mathcal{R}}}$).

→ Appliquons alors le théorème de l'énergie cinétique :

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\mathcal{E}_k &= \delta W(\overrightarrow{F_1}) + \delta W(\overrightarrow{F_2}) + \underbrace{\delta W(\overrightarrow{F_3})}_{0} \\ &= -\mathrm{d}\mathcal{E}_{p_1} - \mathrm{d}\mathcal{E}_{p_2} = -\mathrm{d}(\mathcal{E}_{p_1} + \mathcal{E}_{p_2}) \\ &\equiv -\mathrm{d}\mathcal{E}_p \qquad \rightarrow \mathrm{d}(\mathcal{E}_k + \mathcal{E}_p) = 0 \iff \boxed{\mathcal{E}_m \equiv \mathcal{E}_k + \mathcal{E}_p = \text{cste}} \end{aligned}$$

Conclusion : Lorsqu'un point matériel se déplace dans un champ de force dérivant d'une énergie potentielle, son énergie mécanique reste *constante* au cours du mouvement. On dit qu'un tel système est *conservatif.*

◇ **Définition :** Dans le cas d'un **système conservatif**, l'équation $\mathcal{E}_m = \text{cste}$ s'appelle l'**intégrale première de l'énergie mécanique** : c'est une loi de conservation ne faisant intervenir que les dérivées premières par rapport au temps [a].

a. à la différence du **P.F.D.** ou du Théorème du Moment Cinétique qui conduisent à des équations différentielles du second ordre.

IV.2 Théorème de l'Énergie mécanique / Non conservation de $\mathcal{E}_m$

Notons $\overrightarrow{f}_{NC}$ la résultante des forces s'exerçant sur le point matériel et qui ne dérivent pas d'une énergie potentielle : il s'agit de la résultante des forces *Non Conservatives.*
De même notons $\overrightarrow{f}_C$ est les résultante des forces *conservatives.*
Ainsi, la résultante de toutes les forces s'exerçant sur $\{M, m\}$ s'écrit : $\overrightarrow{F}_{\text{ext}\to M} = \overrightarrow{f}_C + \overrightarrow{f}_{NC}$.
Théorème de l'énergie cinétique :

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\mathcal{E}_k &= \delta W \\ &= \delta W(\overrightarrow{f}_C) + \delta W(\overrightarrow{f}_{NC}) \\ &= \delta W_C + \delta W_{NC} \\ &= -\mathrm{d}\mathcal{E}_p + \delta W_{NC} \qquad \rightarrow \mathrm{d}(\mathcal{E}_k + \mathcal{E}_p) = \delta W_{NC} \iff \boxed{\mathrm{d}\mathcal{E}_m = \delta W_{NC}} \end{aligned}$$

▮ Théorème de l'énergie mécanique : La variation (finie ou élémentaire) d'énergie mécanique d'un point matériel est égale au travail (fini ou élémentaire) des forces **non conservatives** qui s'exercent sur lui.

$$\Delta\mathcal{E}_m = W_{M_1\to M_2}(\overrightarrow{f}_{NC}) \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{d}\mathcal{E}_m = \delta W_{NC}$$

a. On parle aussi, très communément, pour désigner la même entité, de force dérivant d'un *potentiel.* Dans cette formulation le « potentiel » désigne l'« énergie potentielle ». À ne pas confondre avec ce qu'on appelle « potentiel de gravitation » ou « potentiel électrostatique » (par exemple) qui n'ont pas la même dimension (➜ Cf Cours d'**Électromagnétisme**).

Signification du Théorème de l'Énergie mécanique :

• Si $W_{M_1 \to M_2}(\overrightarrow{f}_{NC}) > 0$, alors $\mathcal{E}_m \nearrow$: l'énergie mécanique de M augmente (ce qui signifie que l'extérieur apporte de l'énergie mécanique au système $\{M\}$).

• Si $W_{M_1 \to M_2}(\overrightarrow{f}_{NC}) < 0$, alors $\mathcal{E}_m \searrow$: l'énergie mécanique de M diminue (à cause de frottements par exemple : une partie de $\mathcal{E}_m$ est convertie en énergie cinétique microscopique par transfert thermique).

C'est le cas du pendule lorsqu'on considère les frottements de l'air : au cours du temps il y a amortissement du mouvement du pendule car son énergie mécanique diminuant, l'amplitude de ses oscillations diminue également – Cf. **§IV.3)** suivant.

IV.3 Utilisation de l'intégrale première de l'énergie mécanique pour l'étude des problèmes à un paramètre

Exemple : Cas du pendule sans frottement (système à énergie mécanique constante $\mathcal{E}_0$) :

• $\mathcal{E}_p = \mathcal{E}_{p,g} = mgz + c^{te} = -mgl\cos\theta + c^{te}$
On choisit (arbitrairement) la constante telle que $\mathcal{E}_p = 0$ pour $\theta = 0$.
$\rightarrow$ $\boxed{\mathcal{E}_p = mgl(1-\cos\theta)}$ [b]

• De plus : $\mathcal{E}_k = \frac{1}{2} m\, v^2_{M/\mathcal{R}} = \frac{1}{2} m\, r^2 \dot{\theta}^2$
$\rightarrow$ $\boxed{\mathcal{E}_k = \frac{1}{2} m\, l^2 \dot{\theta}^2}$

• **Thm de l'**$\mathcal{E}_m$: $d\mathcal{E}_k = \delta W_P + \underbrace{\delta W_T}_{0} = -d\mathcal{E}_{p_g}$

$\Rightarrow$ **(1)** $\boxed{\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_k + \mathcal{E}_p = \text{cste} \equiv \mathcal{E}_0 = mgl(1-\cos\theta) + \frac{1}{2} ml^2\dot{\theta}^2}$

• En dérivant **(1)** par rapport au temps, on obtient :

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{(1)}}{\mathrm{d}t} \quad \rightarrow \quad mgl\sin\theta\,\dot{\theta} + ml^2\dot{\theta}\,\ddot{\theta} = 0$$

On peut simplifier par ml, mais aussi par $\dot{\theta}$ car le cas $\{\dot{\theta} = 0 \quad \forall t\}$ ne nous intéresse pas (puisque'il correspond à l'équilibre $\theta = c^{te} = 0$ et que nous nous intéressons, ici, au *mouvement* du pendule hors de sa position d'équilibre !) ; on obtient :

$$\mathbf{(2)} \quad \boxed{\ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin\theta = 0} \qquad \text{avec} \qquad \boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}}$$

• En reprenant **(1)**, on remarque que :

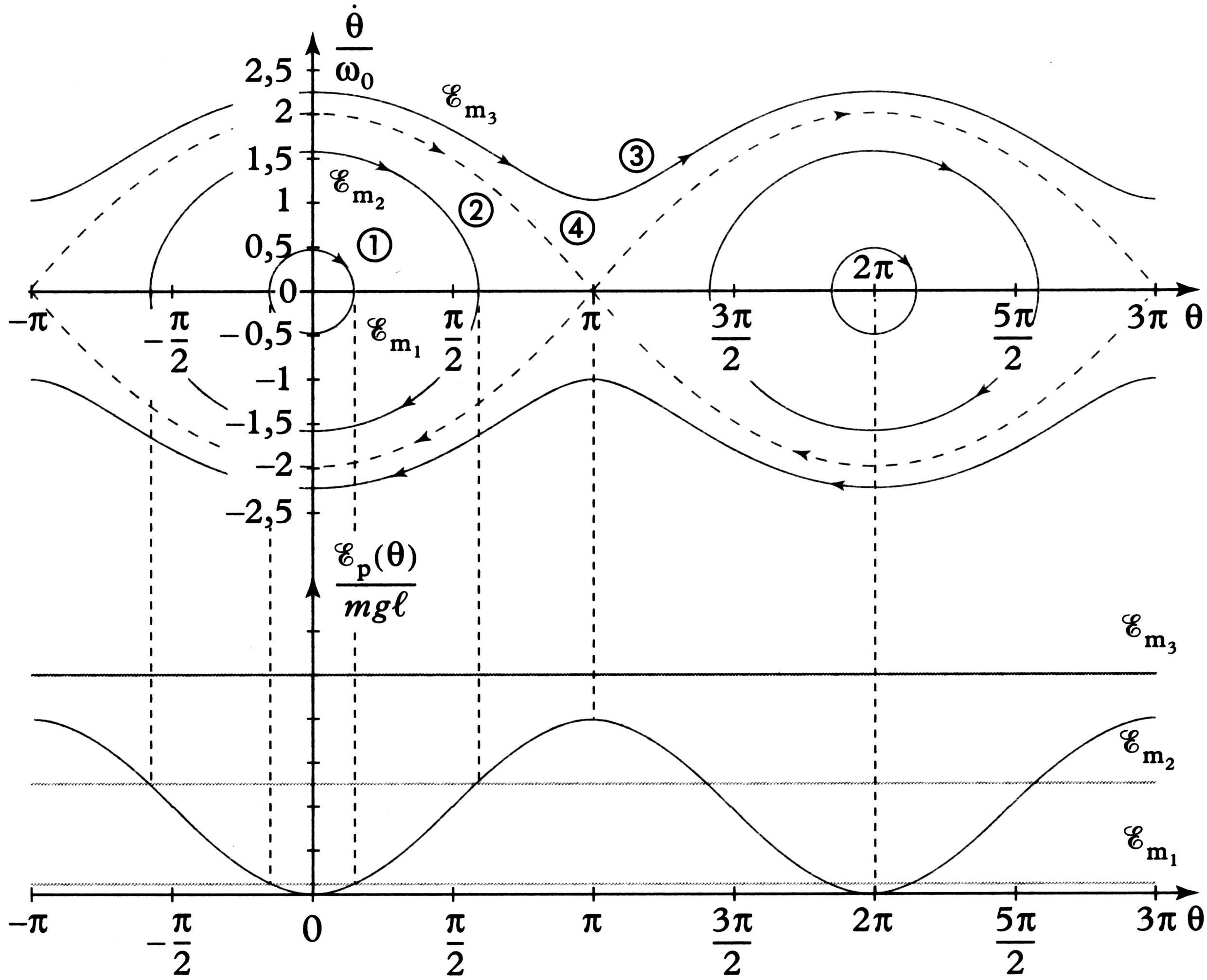
$$\mathcal{E}_k = \mathcal{E}_m - \mathcal{E}_p \quad \Leftrightarrow \dot{\theta}^2 = \frac{2}{ml^2}(\mathcal{E}_0 - \mathcal{E}_p) \geq 0$$

Conclusion : le mouvement ne peut avoir lieu que pour $\boxed{\mathcal{E}_0 \geq \mathcal{E}_p \quad \forall\theta}$

Application : Pour connaître les mouvements possibles du pendule, il suffit de tracer le profil d'énergie potentielle $\mathcal{E}_p$ en fonction de θ et d'imposer (pour une énergie mécanique $\mathcal{E}_0$ donnée du système conservatif) la condition $\mathcal{E}_0 \geq \mathcal{E}_p$.

Sur la page suivante, on a tracé un profil équivalent (non pas $\mathcal{E}_p$ mais $\frac{\mathcal{E}_p}{mgl} = 1 - \cos\theta$) sur lequel on rajoute quelques profils d'énergie mécanique renormalisées $\frac{\mathcal{E}_m}{mgl}$

b. Si on avait choisit (pourquoi pas ?) l'énergie potentielle nulle pour $\theta = \frac{\pi}{2}$, l'expression de l'énergie aurait été : $\mathcal{E}_p = -mgl\cos\theta$.



Portrait de phase et courbe d'énergie potentielle du pendule simple.