M4 – OSCILLATEUR HARMONIQUE

I Modèle de l'oscillateur harmonique (O.H.)

I.1 Exemples ➜ Cf Cours

I.2 Définition

♢ **Définition :** Un **oscillateur harmonique** à un degré de liberté x (X, θ, $\dots$) est un système physique dont l'évolution au cours du temps en l'absence d'amortissement et d'excitation, est régie par l'équation différentielle linéaire :

$$(E_{OH}) \qquad \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \qquad \text{où } \omega_0 \text{ est la pulsation propre.}$$

Rq : On rencontrera cette situation en électricité pour un circuit série contenant une inductance L, une capacité C et une résistance R.
En *régime libre*, c'est à dire sans excitation, et en l'absence d'amortissement ($R = 0$), la charge q aux bornes du condensateur vérifie :

$$\ddot{q} + \frac{1}{LC} q = 0$$ ➜ Cf Cours **E4**

L'importance du concept d'oscillateur harmonique vient de ce qu'il décrit le comportement général d'un système à un degré de liberté *au voisinage d'une position d'équilibre stable.*
Donc, le modèle de l'oscillateur harmonique est très utile pour un problème **unidimensionnel** et une force **conservative** qui ne dépend que d'une variable x (➜ Cf Cours **M3**)

I.3 Description du mouvement de l'oscillateur harmonique

• La solution générale de l'équation différentielle est : $x(t) = X_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$, avec :
- ω_0 **la pulsation propre** du mouvement (en $rad.s^{-1}$,
- X_m **l'amplitude**,
- φ **la phase** (à l'origine des temps).

• X_m et φ sont déterminés à partir des **conditions initiales** (**C.I.**) :
a) $x(t = 0) = X_m \cos\varphi = x_0$
b) $\dot{x}(t = 0) = -X_m\omega_0 \sin\varphi = \dot{x}_0 = v_0$.

♢ **Définition :** Les oscillations d'un oscillateur harmonique sont purement sinusoïdales et **la période propre** des oscillations est : $T_0 = \dfrac{2\pi}{\omega_0}$

Lorsque T_0 ne dépend pas de l'amplitude des oscillations, on dit qu'il y a **isochronisme** des oscillations.

Rq : On peut encore écrire $x = X_m \cos\varphi \cos\omega_0 t - X_m \sin\varphi \sin\omega_0 t$ ou encore

$$x = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t$$

où A et B sont des constantes à déterminer par les conditions initiales. Cette relation est parfois pratique. En tenant compte des **C.I.** :

$$A = X_m \cos\varphi = x_0 \quad \text{et} \quad B = X_m \sin\varphi = -\frac{v_0}{\omega_0} \quad \Rightarrow \quad \boxed{x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t) + \frac{v_0}{\omega_0}\sin(\omega_0 t)}$$

Et donc : $\begin{cases} X_m = \sqrt{A^2 + B^2} = \sqrt{x_0^2 + \left(\dfrac{v_0}{\omega_0}\right)^2} \\ \text{et } \tan\varphi = -\dfrac{B}{A} = -\dfrac{v_0}{\omega_0 x_0} \end{cases}$ avec $\cos\varphi$ du signe de x_0.

I.4 Énergie(s) de l'oscillateur harmonique

◇ **Définition :** (➜ Cf Cours **M3**)
L'Oscillateur Harmonique à un degré de liberté x évolue dans un **puits parabolique d'énergie potentielle** : $\mathcal{E}_p(x) = \mathcal{E}_p(0) + \frac{1}{2}kx^2$

Ceci revient à dire que l'Oscillateur Harmonique est soumis à une **force conservative** :

$$F(x) = -\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_p}{\mathrm{d}x} = -kx$$

Cas du ressort vertical (cf. I.1) :
• Grâce à cette expression de $F(x)$, on retrouve, bien entendu, l'équation du mouvement de l'Oscillateur Harmonique :

$$m\ddot{x} = F(x) \quad \Leftrightarrow \quad \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad \text{avec : } \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Où « x »est la variable notant l' écart par rapport à la position d'équilibre de l'oscillateur harmonique, soit $X = x - x_{eq}$ avec $x_{eq} = x_0 + \frac{mg}{k}$; d'où :

$$\mathcal{E}_p = \frac{1}{2}kX^2 = \frac{1}{2}k\left((x - x_0) - \frac{mg}{k}\right)^2 = \underbrace{\frac{1}{2}k(x - x_0)^2}_{\mathcal{E}_{p,elast}} \underbrace{-mgx}_{\mathcal{E}_{p,g}} + \text{Cste}$$

➜ L'énergie potentielle de l'oscillateur harmonique est bien la somme de ses différentes formes d'énergies potentielles.
Ici, il s'agit de l'énergie potentielle élastique (prise nulle en $x = x_0$) et de l'énergie potentielle de pesanteur (prise nulle en $x = 0$), la Cste permettant de choisir l'origine de l'énergie potentielle totale en $x = x_{eq}$.

• ➜ Cf. **Cours**.

• La solution de l'équation différentielle étant de la forme $x = X_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$ et de période T_0, toutes les grandeurs g décrivant le mouvement sont également périodiques de période T_0 et leurs valeurs moyennes sont définies par :

$$< g > \equiv \frac{1}{T_0}\int_{t_0}^{t} g(t)\mathrm{d}t \qquad \text{avec} \qquad t \equiv t_0 + T_0 \ \text{ et } t_0 \text{ quelconque}$$

➜ La valeur moyenne des énergies cinétique et potentielle sont donc égale à :

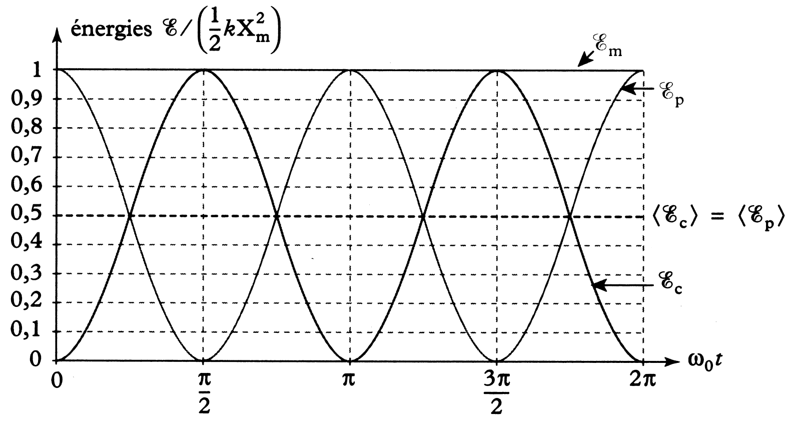
$$< \mathcal{E}_k > \equiv \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} \mathcal{E}_k \mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad < \mathcal{E}_p > \equiv \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} \mathcal{E}_p \mathrm{d}t$$

... Cf. **Cours** ... D'où :

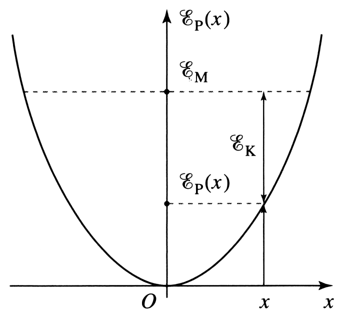
$$\boxed{<\mathcal{E}_k>=\frac{1}{4}\,m w_0^2 X_m^2=\frac{1}{4}kX_m^2} \qquad \boxed{<\mathcal{E}_p>=\frac{1}{4}\,m w_0^2 X_m^2=\frac{1}{4}kX_m^2}$$

Or $\mathcal{E}_m=\mathcal{E}_k+\mathcal{E}_p=\text{Cste}=\frac{1}{2}\,kX_m^2 \quad \longrightarrow \quad \boxed{<\mathcal{E}_k>=<\mathcal{E}_p>=\frac{\mathcal{E}_m}{2}}$ avec $\boxed{\mathcal{E}_m=\frac{1}{2}\,kX_m^2}$

On décrit cette égalité en disant qu'il y a **équipartition de l'énergie.**
(Sous-entendu : l'énergie mécanique , *en moyenne*, se répartit autant en énergie cinétique qu'en énergie potentielle).



Énergies cinétique, potentielle et mécanique de l'oscillateur harmonique ($\varphi = 0$).



Aspect spatial de l'échange mutuel des formes cinétique et potentielle de l'énergie mécanique.

I.5 Portrait de phase d'un oscillateur harmonique

> ◇ **Définition :** On appelle **portrait de phase** d'un système à *un degré de liberté*, dont l'évolution est décrite par la variable $x(t)$, un diagramme caractéristiques des évolutions du système représenté dans le **plan de phase** $(x,\,\dot{x})$ (➜ Cf Cours **M1**).

• On a vu au **I.4)**, pour le **ressort** modélisé par un oscillateur harmonique, que la conservation de l'énergie mécanique (Intégrale Première du Mouvement) donne une équation du type :

$$\frac{1}{2}\,m\dot{x}^2+\frac{1}{2}\,kx^2=\mathcal{E}_m=\text{Cste} \quad \text{soit, encore :} \quad \frac{x^2}{\frac{2\mathcal{E}_m}{k}}+\frac{\dot{x}^2}{\frac{2\mathcal{E}_m}{m}}=1$$

$\rightarrow$ On reconnaît l'équation $\frac{x^2}{a^2}+\frac{\dot{x}^2}{b^2}=1$ d'une **ellipse** de demi-axes :

$$a=\sqrt{\frac{2\mathcal{E}_m}{k}}=\sqrt{\frac{2\mathcal{E}_m}{m\omega_0^2}} \quad \text{selon } x \qquad \text{et} \qquad b=\sqrt{\frac{2\omega_0^2\mathcal{E}_m}{k}}=\sqrt{\frac{2\mathcal{E}_m}{m}} \quad \text{selon } \dot{x}.$$

• L'ensemble des ellipses correspondant aux valeurs de $\mathcal{E}_m$ possibles constitue le portrait de phase de l'oscillateur harmonique **NON amorti et libre** (non excité).
➜ Cf. **Cours**
➜ Cf. **Poly** : dans le cas du pendule simple, la modélisation de l'oscillateur harmonique est valable lorsque le portrait de phase est assimilable à une ellipse. Ce qui est le cas pour les faibles amplitudes : $\theta_m=\alpha\leq 20°$. Il y a alors isochronisme des petites oscillations : $T_0=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$

Rq : Dans le cas des amplitudes modérées ($\theta\leq 90°$), les portraits de phase ne sont plus des ellipses, il n'y a plus isochronisme des petites oscillations et on établit la formule de Borda : $T\simeq T_0\left(1+\frac{\alpha^2}{16}\right)$

II Oscillateur harmonique spatial

Définition : On parle d'**oscillateur harmonique spatial** lorsque les équations décrivant l'évolution du système peuvent se mettre sous la forme de 3 équations de la forme :

$$\begin{cases} m\ddot{x} + k_1 x = 0 \\ m\ddot{y} + k_2 y = 0 \\ m\ddot{z} + k_3 z = 0 \end{cases}$$ x, y, z étant 3 variables indépendantes (par ex. les coordonnées cartésiennes)

De solution générale : $\begin{cases} x = X_m \cos(\omega_1 t + \varphi_1) \\ y = Y_m \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \\ z = Z_m \cos(\omega_3 t + \varphi_3) \end{cases}$ avec $\omega_i^2 = \dfrac{k_i}{m}$ pour $i = 1, 2, 3$.

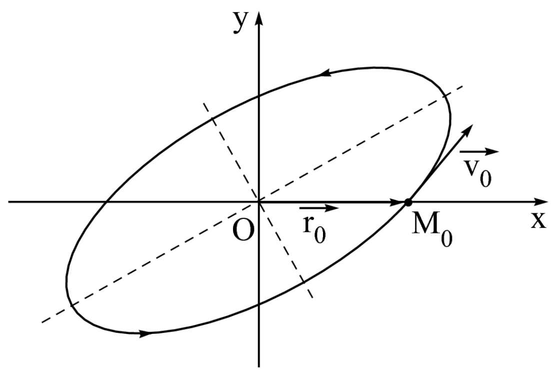
Conclusion : Le mouvement se caractérise par des *oscillations* correspondant à *3 oscillateurs harmoniques indépendants*.

Exemple : Oscillateur Harmonique Spatial *Isotrope*

• Soit un point matériel M repéré par le vecteur $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{OM}$ par rapport à un point O fixe du référentiel d'étude (supposé galiléen).
À la date $t = 0$, il a la position $\overrightarrow{r_0} = \overrightarrow{OM_0}$ et une vitesse $\overrightarrow{v_0}$.
Il est soumis à la force $\overrightarrow{F} = -k\,\overrightarrow{r}$.

• Le **P.F.D.** s'écrit : $m\dfrac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{r}}{\mathrm{d}t^2} = -k\overrightarrow{r}$, soit encore :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{r}}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2\,\overrightarrow{r} = \overrightarrow{0}} \text{ avec : } \omega_0^2 \equiv \frac{k}{m}$$



• La solution s'écrit : $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{A}\,\cos\omega_0 t + \overrightarrow{B}\,\sin\omega_0 t$, où $\overrightarrow{A}$ et $\overrightarrow{B}$ sont des vecteurs à déterminer en fonction des **C**onditions **I**nitiales.

→ En utilisant : $\overrightarrow{r}(t=0) = \overrightarrow{r_0}$, on déduit : $\boxed{\overrightarrow{A} = \overrightarrow{r_0}}$.

→ Avec $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{r}}{\mathrm{d}t}(t=0) = -\overrightarrow{A}\,\omega_0 \sin\omega_0 t + \overrightarrow{B}\,\omega_0\cos\omega_0 t$, on déduit : $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{r}}{\mathrm{d}t}(t=0) = \boxed{\overrightarrow{v_0} = \overrightarrow{B}\,\omega_0}$.

Finalement : $\boxed{\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r_0}\cos\omega_0 t + \dfrac{\overrightarrow{v_0}}{\omega_0}\sin\omega_0 t}$, ce qui montre que le mouvement se fait dans le *plan* passant par O et déterminé par les directions de $\overrightarrow{r_0}$ et $\overrightarrow{v_0}$.

• Définissons un repère en prenant l'axe Ox suivant $\overrightarrow{r_0}$ et l'axe Oy dans le plan de la trajectoire. En projetant l'équation de $\overrightarrow{r}$ sur les axes, on a :

$$\begin{cases} x = r_0\cos\omega_0 t + \dfrac{v_{0x}}{\omega_0}\sin\omega_0 t \\ y = \dfrac{v_{0y}}{\omega_0}\sin\omega_0 t \end{cases}$$ où v_{0x} et v_{0y} sont les composantes de $\overrightarrow{v_0}$.

→ On obtient bien *2 oscillateurs indépendants*[1].

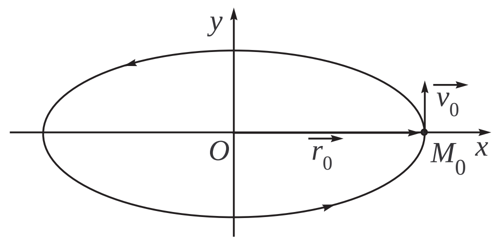
• L'équation de la trajectoire s'obtient en éliminant le temps t à l'aide de la relation $\sin^2\omega_0 t + cos^2\omega_0 t = 1$.

On isole donc : $\begin{cases} \sin\omega_0 t = \dfrac{\omega_0 y}{v_{0y}} \\ \cos\omega_0 t = \dfrac{x}{r_0} - \dfrac{y v_{0x}}{r_0 v_{0y}} \end{cases}$ on a alors : $\left(\dfrac{v_{0x}^2}{r_0^2 v_{0y}^2} + \dfrac{\omega_0^2}{v_{0y}^2}\right) y^2 + \dfrac{x^2}{r_0^2} - 2xy\,\dfrac{v_{0x}}{r_0^2 v_{0y}} = 1$

→ **CI :** La trajectoire est donc une **ellipse centrée en** O.

1. Le fait qu'il n'en apparaît que 2 au lieu des trois attendus vient du choix judicieux du repère Oxy pour exprimer la trajectoire plane

Ce qui se voit bien dans le cas particulier $v_{0x} = 0$ où l'équation devient :



$$\frac{x^2}{r_0^2} + \frac{y^2}{\frac{v_{0y}^2}{\omega_0^2}} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

avec $a = r_0$ et $b = \dfrac{\mid v_{0y} \mid}{\omega_0}$.

Qu'en est-t-il de l'énergie potentielle d'un oscillateur harmonique spatial ?
Un raisonnement similaire au précédent (cf. §4) mais tenant compte, cette fois, des trois équations scalaires du mouvement issues du **P.F.D.** conduit à :

$$\mathcal{E}_m = \left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}k_1x^2\right) + \left(\frac{1}{2}m\dot{y}^2 + \frac{1}{2}k_2y^2\right) + \left(\frac{1}{2}m\dot{z}^2 + \frac{1}{2}k_3z^2\right)$$

→ **Retenons** que l'énergie mécanique d'un oscillateur harmonique spatial est la *somme* des énergies mécaniques des *trois* oscillateurs harmoniques associés à ses *trois* degrés de liberté.

On reconnaît l'énergie cinétique : $\mathcal{E}_k = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\dot{y}^2 + \frac{1}{2}m\dot{z}^2$

et il apparaît l'énergie potentielle : $\boxed{\mathcal{E}_p = \dfrac{1}{2}k_1x^2 + \dfrac{1}{2}k_2y^2 + \dfrac{1}{2}k_3z^2}$.

Cl : Un oscillateur harmonique spatial correspond donc à un point matériel soumis à une *force conservative* :

$$\overrightarrow{F} \equiv -\left(\frac{\partial \mathcal{E}_p}{\partial x}\right)_{y,z}\overrightarrow{e_x} - \left(\frac{\partial \mathcal{E}_p}{\partial y}\right)_{x,z}\overrightarrow{e_y} - \left(\frac{\partial \mathcal{E}_p}{\partial z}\right)_{x,y}\overrightarrow{e_z} = -k_1x\,\overrightarrow{e_x} - k_2y\,\overrightarrow{e_y} - k_3z\,\overrightarrow{e_z}$$

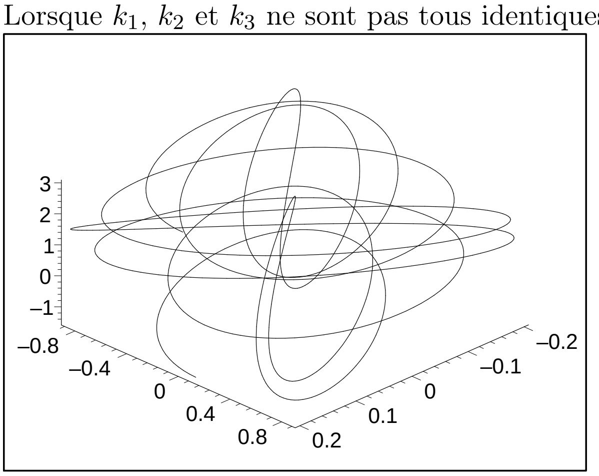
Et pour l'oscillateur harmonique spatial isotrope ?
Ce qui précède est toujours valable bien sûr , puisque l'O.H.S.I. est un cas particulier d'O.H.S. où la force de rappel est colinéaire au vecteur position :

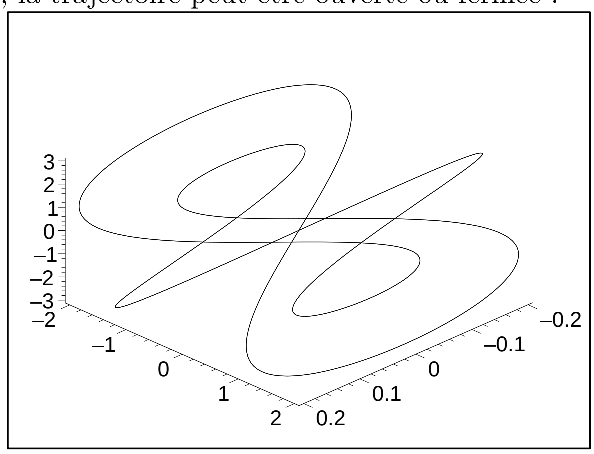
$$\boxed{\overrightarrow{F} \equiv -k\,\overrightarrow{r}} = -kx\,\overrightarrow{e_x} - ky\,\overrightarrow{e_y} - kz\,\overrightarrow{e_z} \qquad \text{ce qui signifie :} \quad k_1 = k_2 = k_3.$$

Ce qui revient à dire que l'énergie potentielle de l'oscillateur n'est fonction que de la distance $r = OM$ du point matériel M au centre de force O :

$$\boxed{\mathcal{E}_p = \frac{1}{2}kOM^2 = \frac{1}{2}kr^2}$$

Trajectoire d'un Oscillateur Harmonique Spatial Anisotrope :
Lorsque k_1, k_2 et k_3 ne sont pas tous identiques, la trajectoire peut être ouverte ou fermée :





III Oscillations libres amorties de l'Oscillateur Harmonique

III.1 Exemples

Dans les deux exemples du **I.1)**, la façon la plus simple de tenir compte de l'amortissement est d'introduire une force de frottement proportionnelle à la vitesse. On parle dans ce cas de frottement fluide *visqueux* car cela décrit bien l'effet dû au déplacement dans un liquide ou un gaz à des vitesses faibles. Cela permet par ailleurs, de conserver la linéarité des équations puisque la force de frottement visqueux est proportionnelle à la vitesse [2].

a Ressort vertical (Cf I.1)) :

Dans l'exemple du ressort, on ajoute la force opposée à la vitesse $-h\dot{x}\,\overrightarrow{e_x}$,
d'où l'équation ② − ① : $m\ddot{x} = -h\dot{x} - k(x - x_{eq})$
soit, en introduisant l'**écart** par rapport à l'équilibre $X \equiv x - x_{eq}$: $\ddot{X} + \frac{h}{m}\dot{X} + \frac{k}{m}X = 0$.
Ce que l'on peut encore écrire, en introduisant la **pulsation propre** ω_0 du système {ressort-masse} et la **durée caractéristique** τ :

$$\ddot{X} + \frac{\dot{X}}{\tau} + \omega_0^2 X = 0 \quad \text{avec} \quad \omega_0^2 \equiv \frac{k}{m} \quad \text{et} \quad \boxed{\tau \equiv \frac{m}{h}}.$$

b Pendule simple :

On ajoute la force $-h,\overrightarrow{v} = -hl\dot{\theta}\,\overrightarrow{e_\theta}$, d'où en projetant le **PF.D.** selon $\overrightarrow{e_\theta}$ dans la base polaire : $ml\ddot{\theta} = -hl\dot{\theta} - mg\sin\theta$,
soit, pour les petites oscillations ($\sin\theta \simeq \theta$) : $\ddot{\theta} + \frac{h}{m}\dot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0$.
Ce que l'on peut encore écrire, en introduisant la **pulsation propre** ω_0 du pendule (système {fil-masse}) et la **durée caractéristique** τ :

$$\ddot{\theta} + \frac{\dot{\theta}}{\tau} + \omega_0^2\theta = 0 \quad \text{avec} \quad \omega_0^2 \equiv \frac{g}{l} \quad \text{et} \quad \boxed{\tau \equiv \frac{m}{h}}.$$

c Rappel d'électrocinétique :

Nous rencontrerons un tel type d'équation, en **Électricité** (➜ Cf Cours **E4**) : , dans le circuit RLC série, l'amortissement est dû à la résistance, et la charge q du condensateur vérifie en régime libre :

$$\ddot{q} + \frac{R}{L}\dot{q} + \frac{1}{LC}q = 0, \quad \text{qu'on peut encore écrire :} \quad \ddot{q} + \frac{\dot{q}}{\tau} + \omega_0^2 q = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ddot{q} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{q} + \omega_0^2 q = 0$$

avec : $\boxed{\frac{1}{\tau} = \frac{\omega_0}{Q} = \frac{R}{L}}$. Soit : $\boxed{\tau = \frac{L}{R}}$ et $\boxed{Q = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{1}{RC\omega_0}}$, avec, toujours, $\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$

III.2 Définitions

> ◇ **Définition :** On appelle **Oscillateur Harmonique Amorti** un système à *un* degré de liberté dont l'évolution est régie par l'équation différentielle linéaire du second ordre : $$\ddot{x} + \frac{\dot{x}}{\tau} + \omega_0^2 x = 0 \quad (E_{OHA})$$
> avec ω_0 la **pulsation propre**
> et τ **le temps de relaxation** (encore appelée **durée caractéristique**).

2. et non pas à son carré, comme c'est le cas des forces de frottement fluide pour les grandes vitesses (➜ Cf Cours **M2**)

On introduit souvent le paramètre sans dimension Q appelé **facteur de qualité** défini par : $Q \equiv \omega_0 \tau$.

L'équation devient : $\ddot{x} + \dfrac{\omega_0}{Q}\,\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$ – d'équation caractéristique : $r^2 + \dfrac{r}{\tau} + \omega_0^2 = 0$ **(1)**

Propriété : Plus Q *est grand*, plus le terme lié à *l'amortissement est faible.*

III.3 Les régimes de l'oscillateur harmonique amorti (➜ Cf. E4.IV)

Le discriminant δ de l'équation caractéristique **(1)** :

$$\Delta = \frac{1}{\tau^2} - 4\omega_0^2 = \frac{\omega_0^2}{Q^2} - 4\omega_0^2 = -4\omega_0^2(1 - \frac{1}{4Q^2})$$

Trois régimes libres sont possibles :

Régime Apériodique	**Régime Critique**	**Régime Pseudo-périodique**
$Q < \dfrac{1}{2} \qquad (\Delta > 0)$	$Q = \dfrac{1}{2} \qquad (\Delta = 0)$	$Q > \dfrac{1}{2} \qquad (\Delta < 0)$
Il existe deux solutions réelles r_1 et r_2 de **(1)** avec $\lvert r_1\rvert < \lvert r_2\rvert$.	L'unique solution de **(1)** est : $r = -\omega_0$ d'où :	Deux solutions imaginaires de **(1)** : $r_{1/2} = -\dfrac{1}{2\tau} \pm j\sqrt{\omega_0^2 - \dfrac{1}{4\tau^2}}$ on note $\alpha \equiv \dfrac{1}{2\tau} = \dfrac{\omega_0}{2Q} < \omega_0$ et $\omega \equiv \sqrt{\omega_0^2 - \dfrac{1}{4\tau^2}} = \omega_0\sqrt{1 - \dfrac{1}{4Q^2}}$
la solution est de la forme : $x = A\,e^{r_1 t} + B\,e^{r_2 t}$ $(A,B) \in \mathbb{R}^2$	la solution est de la forme : $x = (A + Bt)\,e^{-\omega_0 t}$ $(A,B) \in \mathbb{R}^2$	la solution est de la forme : $x = e^{-\alpha t}\,A\cos(\omega t + \varphi)$ $A \in \mathbb{R}^+$ et $\varphi \in [0, 2\pi[$ **Pseudo-période :** $T = \dfrac{2\pi}{\omega} = \dfrac{2\pi}{\omega_0\sqrt{1 - \dfrac{1}{4Q^2}}}$
r_1 et r_2 sont toutes les deux négatives et leur produit vaut : $r_1 r_2 = \omega_0^2$ $\rightarrow \lvert r_1\rvert < \omega_0$ et $\lvert r_2\rvert > \omega_0$.		$T \simeq \dfrac{2\pi}{\omega_0}(1 + \dfrac{1}{8Q^2}) > \dfrac{2\pi}{\omega_0} = T_0$ pseudo-période>période propre
$\rightarrow x$ s'amortit donc principalement en $e^{r_1 t} = e^{-\lvert r_1\rvert t}$.	x s'amortit comme $e^{-\omega_0 t}$: *cas où l'amortissement est le plus rapide* (durée $\sim \dfrac{2\pi}{\omega_0}$)	$\rightarrow$ amortissement au bout de qques T.
		Définition : Décrément logarithmique : $\delta \equiv ln\dfrac{x(t)}{x(t+T)} = ln\dfrac{e^{-\alpha t}}{e^{-\alpha(t+T)}}$ $\rightarrow$ $\delta = \alpha T$

III.4 Énergie de l'oscillateur harmonique amorti

Reprenons l'équation de l'oscillateur harmonique amorti :

$$\ddot{x} + \frac{\dot{x}}{\tau} + \omega_0^2 x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ddot{x} + \omega_0^2 x = -\frac{\dot{x}}{\tau}$$

Multiplions cette équation par $m\dot{x}$; il vient :

$$m\ddot{x}\dot{x} + m\omega_0^2 \dot{x}x = -\frac{m\dot{x}^2}{\tau} < 0$$

Ce qu'on peut encore écrire :

L'énergie mécanique diminue donc à cause des phénomènes d'amortissement.

• En *régime pseudo périodique*, les pertes relatives pendant une pseudo-période sont :
... calculs : cf. Cours manuscrit ...

$$\boxed{-\frac{\Delta\mathcal{E}_m}{\mathcal{E}_m} = \frac{\mathcal{E}_m(t) - \mathcal{E}_m(t+T)}{\mathcal{E}_m(t)} \cong \frac{2\pi}{Q}}$$

• → cf. PORTRAITS DE PHASE :
Il y a retour à la position d'équilibre stable ($x = 0$, $\dot{x} = 0$) quel que soit le régime libre.
On dit que ce point particulier ($x = 0$, $\dot{x} = 0$) du plan de phase est un «attracteur».